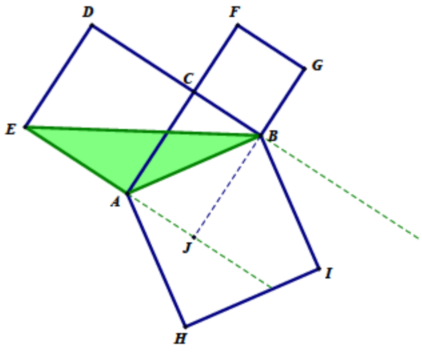
由歐幾里得原本的畢氏定理談起

李信昌

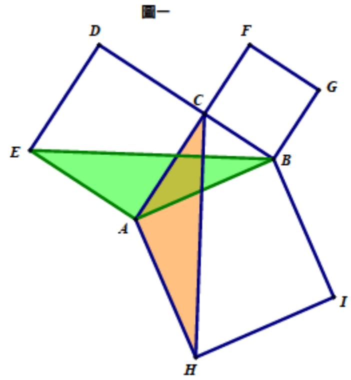
如圖一，直角三角形 ABC 中，$\angle ACB = 90^{\circ}$，以三角形 ABC 的三邊為邊長各自向外作正方形，作 $\overleftrightarrow{DB} // \overleftrightarrow{EA}$ ，J 點是垂足。因為平行線之間距離處處相等，所以

$\overline{BJ} = \overline{CA}$ 。



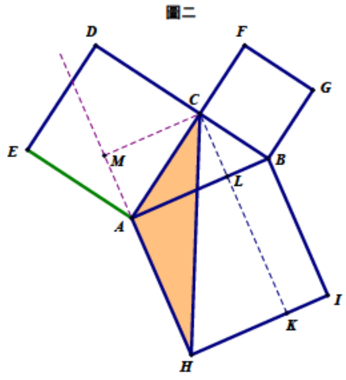
圖一

因為三角形 EAB 的面積等於 $\dfrac{\overline{EA} \times \overline{BJ}}{2}$ ，正方形 ACDE 的面積等於 $\overline{EA} \times \overline{CA} = \overline{EA} \times \overline{BJ}$ ，所以正方形 ACDE 的面積是三角形 EAB 的面積的 2 倍。…(1)



圖二

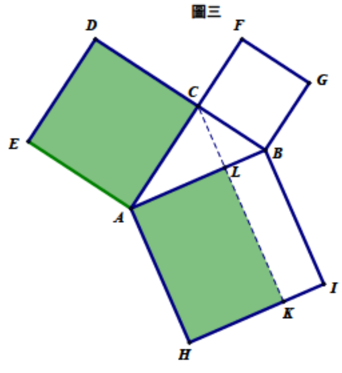
如圖二，正方形 ACDE 中，$\overline{EA} = \overline{CA}$ ，正方形 ABIH 中，$\overline{AH} = \overline{BA}$ 。因為 $\angle EAC = \angle BAH = 90^{\circ}$，所以 $\angle EAC + \angle CAB = \angle BAH + \angle CAB$，因此 $\angle EAB = \angle CAH$。由 SAS 全等性質，可以知道 $\triangle EAB \cong \triangle CAH$，所以△EAB 的面積等於△CAH 的面積。



圖三

如圖三，作 $\overleftrightarrow{CK} // \overleftrightarrow{HA}$ ，$\overline{CM} \perp \overleftrightarrow{HA}$ ， L、K、M 三點都是垂足。因為平行線之間距離處處相等，所以 $\overline{CM} = \overline{LA} = \overline{KH}$ 。同理可知 $\overline{AH} = \overline{LK}$ 。

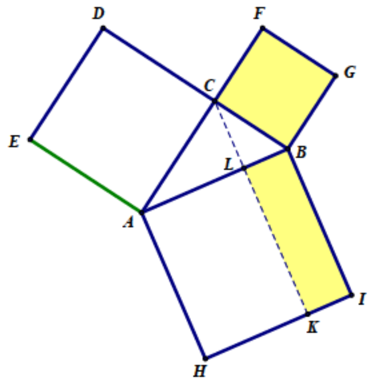
因為三角形 CAH 的面積等於 $\dfrac{\overline{AH} \times \overline{CM}}{2} = \dfrac{\overline{AH} \times \overline{KH}}{2}$ ，長方形 AHKL 的面積等於 $\overline{AH} \times \overline{KH}$ ，所以長方形 AHKL 的面積是三角形 CAH 的面積的 2 倍。….(2)



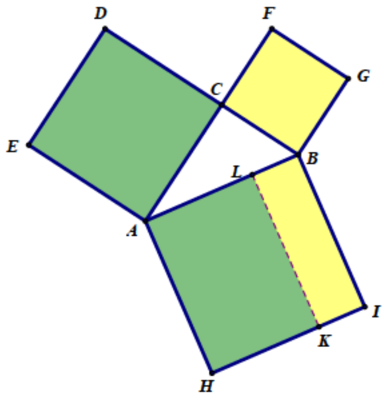
圖四

由(1)和(2)得知，正方形 ACDE 的面積是三角形 EAB 的面積的 2 倍，而且長方形 AHKL 的面積是三角形 CAH 的面積的 2 倍，又△EAB ＝△CAH，所以正方形 ACDE 的面積等於長方形 AHKL 的面積，如圖四。

依循上述的推論方法可以得知正方形 BCFG 的面積等於長方形 BIKL 的面積，如圖五。
因為正方形面積 AHIB 的面積＝長方形 AHKL 的面積＋長方形 BIKL 的面積，所以正方形面積 AHIB 的面積＝正方形 ACDE 的面積＋正方形 BCFG 的面積，因此 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$ 。



圖五

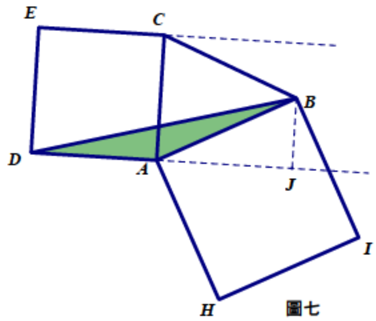


圖六

「如果三角形 ABC 是銳角三角形，$\angle ACB<90^\circ$，則 $\overline{AB}^2$ 和 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$ 的大小關係為何?」

如圖七，以三角形 ABC 的邊為邊長各自向外作正方形，作 $\overrightarrow{EC}//\overrightarrow{DA}$ ，$\overline{BJ}\perp\overrightarrow{DA}$ ，J 點是垂足，顯然 $\overline{BJ}<\overline{CA}$ 。

因為三角形 DAB 的面積等於 $\dfrac{\overline{DA}\times\overline{BJ}}{2}$ ，正方形 DACE 的面積等於 $\overline{DA}\times\overline{CA}$ 。因為 $\overline{BJ}<\overline{CA}$，所以三角形 DAB 的面積的 2 倍小於正方形 DACE 的面積。…(3)

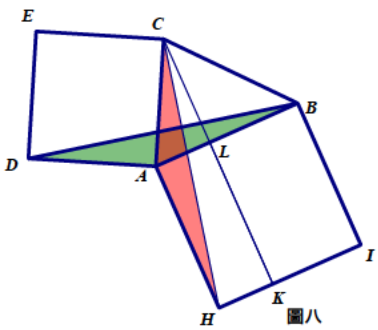


圖七

如圖八，得知 $\triangle DAB\cong\triangle CAH$ (SAS 全等性質)，可參閱圖二說明。

作 $\overline{CK}//\overline{AH}$，L 和 K 兩點是垂足。…(4)

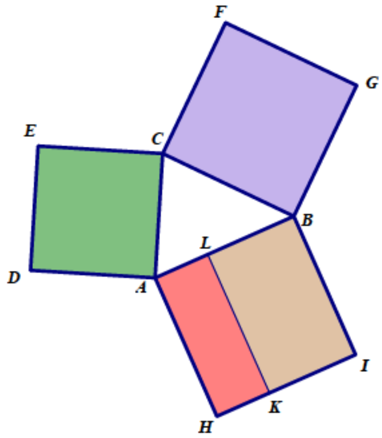
得知△CAH 的面積的 2 倍等於長方形 AHKL 的面積，可參閱圖三說明。…(5)



圖八

綜合(3)(4)(5)可知 AHKL＝2△CAH＝2△DAB< DACE，即正方形 DACE 的面積大於於長方形 AHKL。…(6)

如圖九，以上述的推論方法可以知道正方形 FCBG 的面積大於於長方形 BIKL。…(7)



圖九

因為正方形 ABIH 面積＝長方形 AHKL 面積＋長方形 BIKL 面積。由(6)(7)得知 DACE＋DACE ＞ AHKL＋BIKL＝AHIB，因此 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2>\overline{AB}^2$。

處理問題的數學方法不會是唯一，我們鼓勵學生多元思考，除了因循歐幾里得的數學方法，一定會有其他解決問題的方法。

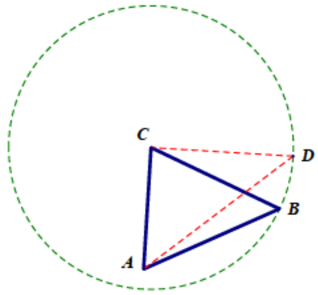
如圖十，可以 C 點為圓心，$\overline{BC}$ 為半徑畫圓 C。再通過 C 點作 $\overline{AC}$ 的垂直線交圓 C 於 D 點，並連成直角△ACD。直角△ACD 中∠ACD=90°，由畢氏定理可知

$\overline{AC}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2$ 。…(8)

因為△ACD 和△ACB 中，$\overline{AC}=\overline{AC}$，$\overline{CD}=\overline{CB}$，∠ACD ＞ ∠ACB，

由樞紐定理可知 $\overline{AD}>\overline{AB}$ 。…(9)

由(8)(9)得知 $\overline{AC}^2+\overline{CD}^2>\overline{AB}^2$。



圖十

---本文完---

相關連結:

昌爸工作坊---樞紐定理

http://www.mathland.idv.tw/cai/inequtri1.html