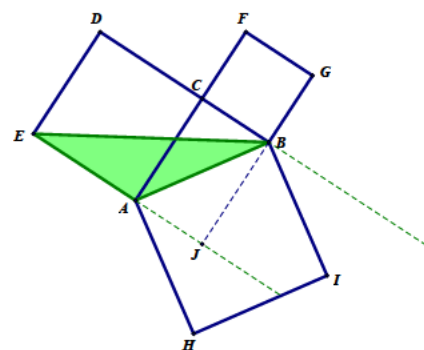


如圖一，直角三角形 ABC 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，以三角形 ABC 的三邊為邊長各自向外作正方形，作 $\overline{DB} \parallel \overline{EA}$ ，J 點是垂足。因為平行線之間距離處處相等，所以

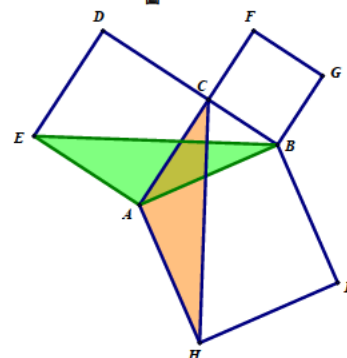
$$\overline{BJ} = \overline{CA}。$$

因為三角形 EAB 的面積等於 $\frac{\overline{EA} \times \overline{BJ}}{2}$ ，正方形 ACDE 的面積等於 $\overline{EA} \times \overline{CA} = \overline{EA} \times \overline{BJ}$ ，所以正方形 ACDE 的面積是三角形 EAB 的面積的 2 倍。……(1)



圖一

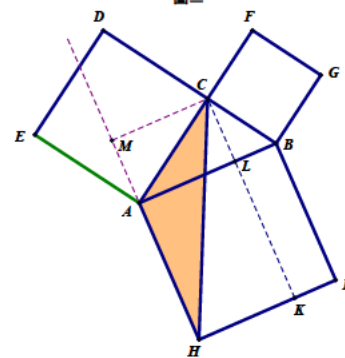
如圖二，正方形 ACDE 中， $\overline{EA} = \overline{CA}$ ，正方形 ABIH 中， $\overline{AH} = \overline{BA}$ 。因為 $\angle EAC = \angle BAH = 90^\circ$ ，所以 $\angle EAC + \angle CAB = \angle BAH + \angle CAB$ ，因此 $\angle EAB = \angle CAH$ 。由 SAS 全等性質，可以知道 $\triangle EAB \cong \triangle CAH$ ，所以 $\triangle EAB$ 的面積等於 $\triangle CAH$ 的面積。



圖二

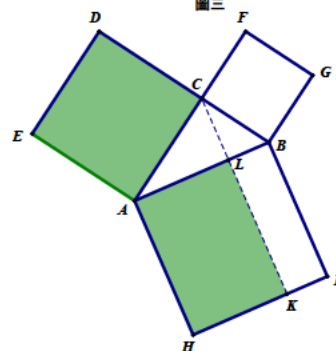
如圖三，作 $\overline{CK} \parallel \overline{HA}$ ， $\overline{CM} \perp \overline{HA}$ ，L、K、M 三點都是垂足。因為平行線之間距離處處相等，所以 $\overline{CM} = \overline{LA} = \overline{KH}$ 。同理可知 $\overline{AH} = \overline{LK}$ 。

因為三角形 CAH 的面積等於 $\frac{\overline{AH} \times \overline{CM}}{2} = \frac{\overline{AH} \times \overline{KH}}{2}$ ，長方形 AHKL 的面積等於 $\overline{AH} \times \overline{KH}$ ，所以長方形 AHKL 的面積是三角形 CAH 的面積的 2 倍。……(2)



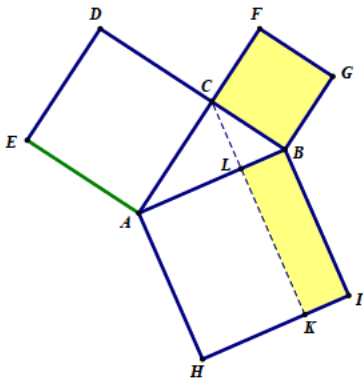
圖三

由(1)和(2)得知，正方形 ACDE 的面積是三角形 EAB 的面積的 2 倍，而且長方形 AHKL 的面積是三角形 CAH 的面積的 2 倍，又 $\triangle EAB = \triangle CAH$ ，所以正方形 ACDE 的面積等於長方形 AHKL 的面積，如圖四。

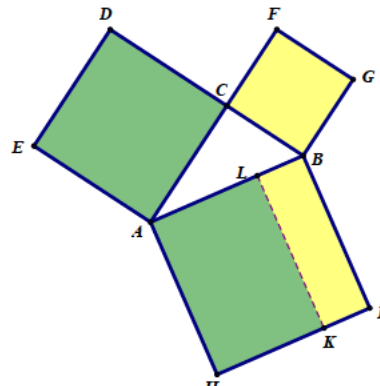


圖四

依循上述的推論方法可以得知正方形 BCFG 的面積等於長方形 BIKL 的面積，如圖五。
 因為正方形面積 AHIB 的面積 = 長方形 AHKL 的面積 + 長方形 BIKL 的面積，所以正方形面積
 AHIB 的面積 = 正方形 ACDE 的面積 + 正方形 BCFG 的面積，因此 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ 。



圖五



圖六

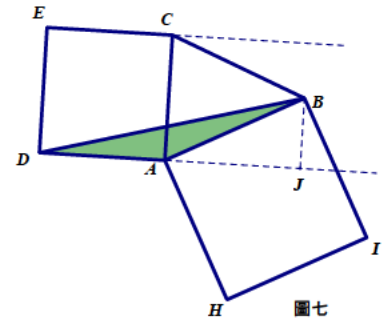
「如果三角形 ABC 是銳角三角形， $\angle ACB < 90^\circ$ ，則 \overline{AB}^2 和 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ 的大小關係為何？」

如圖七，以三角形 ABC 的邊為邊長各自向外作正方形，作

$\overline{EC} \parallel \overline{DA}$ ， $\overline{BJ} \perp \overline{DA}$ ，J 點是垂足，顯然 $\overline{BJ} < \overline{CA}$ 。

因為三角形 DAB 的面積等於 $\frac{\overline{DA} \times \overline{BJ}}{2}$ ，正方形 DACE 的面積等

於 $\overline{DA} \times \overline{CA}$ 。因為 $\overline{BJ} < \overline{CA}$ ，所以三角形 DAB 的面積的 2 倍小於正方形 DACE 的面積。…(3)



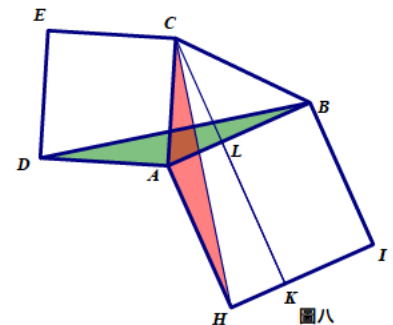
圖七

如圖八，得知 $\triangle DAB \cong \triangle CAH$ (SAS 全等性質)，可參閱圖二說明。

作 $\overline{CK} \parallel \overline{AH}$ ，L 和 K 兩點是垂足。…(4)

得知 $\triangle CAH$ 的面積的 2 倍等於長方形 AHKL 的面積，可參閱圖三說明。…(5)

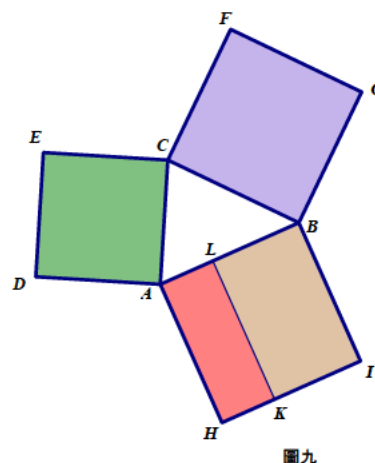
綜合(3)(4)(5)可知 $AHKL = 2\triangle CAH = 2\triangle DAB < DACE$ ，即正方形 DACE 的面積大於長方形 AHKL。…(6)



圖八

如圖九，以上述的推論方法可以知道正方形 FCBG 的面積大於於長方形 BIKL。…(7)

因為正方形 ABIH 面積 = 長方形 AHKL 面積 + 長方形 BIKL 面積。由(6)(7)得知 $\overline{DACE} + \overline{DACE} > \overline{AHKL} + \overline{BIKL} = \overline{AHIB}$ ，因此 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 > \overline{AB}^2$ 。



處理問題的數學方法不會是唯一，我們鼓勵學生多元思考，除了因循歐幾里得的數學方法，一定會有其他解決問題的方法。

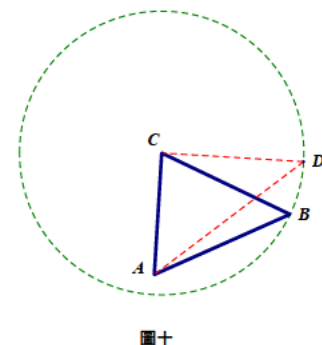
如圖十，可以 C 點為圓心， \overline{BC} 為半徑畫圓 C。再通過 C 點作 \overline{AC} 的垂直線交圓 C 於 D 點，並連成直角 $\triangle ACD$ 。直角 $\triangle ACD$ 中 $\angle ACD = 90^\circ$ ，由畢氏定理可知

$$\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 \quad \dots(8)$$

因為 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ACB$ 中， $\overline{AC} = \overline{AC}$ ， $\overline{CD} = \overline{CB}$ ， $\angle ACD > \angle ACB$ ，

由樞紐定理可知 $\overline{AD} > \overline{AB}$ 。…(9)

由(8)(9)得知 $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 > \overline{AB}^2$ 。



---本文完---

相關連結:

昌爸工作坊---樞紐定理

<http://www.mathland.idv.tw/cai/inequtri1.html>