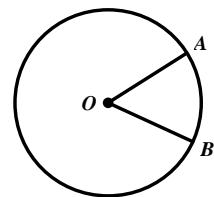


角度是小學與國中學生熟悉的旋轉量單位，將圓周分成 360 等分，每等分弧所對的圓心角的大小就是 1 度(degrees, deg)，記做 1° 。到了高中職學習三角函數時，認識角的另外計量單位，弧度(也稱作徑度，radians, rad)，當 \widehat{AB} 長與半徑 \overline{OA} 長相等時， \widehat{AB} 所對的圓心角的大小就是 1 弧度(1 rad)，通常不寫單位，1 弧度就簡記做 1。



一圓周是 360° ，圓周長是半徑長的 2π 倍，由弧度的定義可知一圓周是 2π (弧度)，即 $2\pi = 360^\circ$ ，所以 1 弧度 = $(\frac{180}{\pi})^\circ$ 大約是 57.3° 。

一般計算器計量角的單位是角度(deg, $^\circ$)， $1^\circ = (\frac{\pi}{180})$ 弧度 = $\frac{\pi}{180}$ 。

因為 $\frac{1}{180} \doteq 5.55555556 \times 10^{-3}$ ， $\frac{1}{555555556} \doteq 1.8 \times 10^{-9}$ ，所以 $\sin(\frac{1}{555555556})^\circ \doteq \sin(1.8 \times 10^{-9})^\circ$ 。

如果改以弧度為單位，則 $\sin(1.8 \times 10^{-9})^\circ = \sin(1.8 \times 10^{-9} \times \frac{\pi}{180})$ (弧度)。

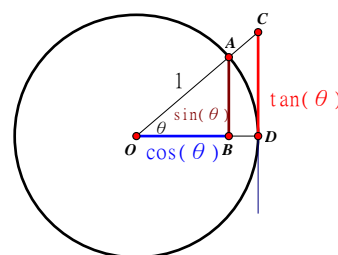
因此 $\sin(\frac{1}{555555556})^\circ \doteq \sin(1.8 \times 10^{-9} \times \frac{\pi}{180})$ 。

說明「如果 $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$ ，且 θ 趨近 0 時，則 $\sin \theta = \theta$ 。」

右圖，圓 O 半徑是 1， $\angle AOB = \theta$ (弧度)，則 \widehat{AD} 長是 θ 。

$\overline{AB} \perp \overline{OD}$ ， $\overline{CD} \perp \overline{OD}$ ，因此

$\overline{AB} = \sin \theta$ ， $\overline{OB} = \cos \theta$ ， $\overline{CD} = \tan \theta$ 。



右圖， $\triangle CDO$ 的面積大於扇形 OAD，扇形 OAD 的面積大於 $\triangle OAB$ 。

$\frac{1 \times \tan \theta}{2} > \frac{1 \times \theta}{2} > \frac{1 \times \sin \theta}{2}$ ，所以 $\tan \theta > \theta > \sin \theta$ 。

因為 $\theta > \sin \theta$ ，所以 $1 > \frac{\sin \theta}{\theta}$ 。... (1)

因為 $\tan \theta > \theta$ ， $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} > \theta$ ，所以 $\frac{\sin \theta}{\theta} > \cos \theta$ 。... (2)

由(1)(2)可知 $1 > \frac{\sin \theta}{\theta} > \cos \theta$ ，又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \theta = 1$ ，根據夾擠定理(Sandwich theorem)可知

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ ，也就是說當 $\theta > 0$ 且 θ 趨近於 0 時， $\sin \theta$ 幾乎等於 θ 。

因此 $\sin(\frac{1}{555555556})^\circ \doteq \sin(1.8 \times 10^{-9} \times \frac{\pi}{180}) = 1.8 \times 10^{-9} \times \frac{\pi}{180} = \pi \times 10^{-11}$ 。

如果手持式電子計算器(calculator)沒有 π 鍵，就先鍵入 555555555，再按 $[x^{-1}] [=]$ 兩鍵求倒數，最後按 $[\sin] [=]$ 兩鍵，可得 $3.141592657 \times 10^{-11}$ ，當中 3.141592657 與 π 非常接近。

