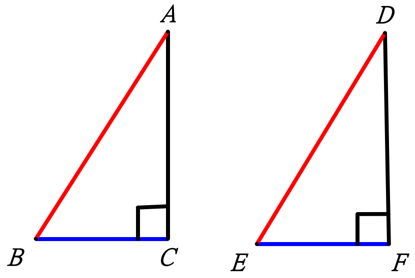
探索三角形 SSA

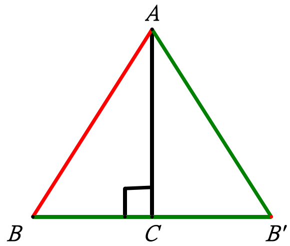
「△ABC 和△DEF 中，如果$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，∠C=∠F，試問△ABC 和△DEF 是否全等？」

(1) 如果∠C=∠F=90°，且$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，則△ABC≅△DEF，

也就是 RHS(斜股性質)



茲證明 RHS(斜股性質)如下：



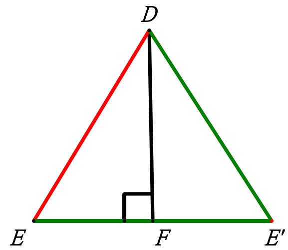
1. 在△ABC 上延長$\overrightarrow{BC}$，並在$\overrightarrow{BC}$上取 B'點，使得$\overline{BC}=\overline{BC'}$。

   連接$\overline{AB'}$。

   因為△ABC 和△AB'C 的$\overline{AC}=\overline{AC}$，∠ACB=∠ACB'，$\overline{BC}=\overline{BC'}$，

   所以△ABC≅△AB'C (根據 SAS 全等性質)。因此得知$\overline{AB}=\overline{AB'}$。

   依上述相同的作法可得△DEE'，並同理可以證明$\overline{DE}=\overline{DE'}$。



2. 因為$\overline{AB}=\overline{DE}$(已知條件)，且$\overline{AB}=\overline{AB'}$，$\overline{DE}=\overline{DE'}$，所以

   $\overline{AB'}=\overline{DE'}$。

   $\overline{BB'}=2\overline{BC}$，$\overline{EE'}=2\overline{EF}$，因為$\overline{BC}=\overline{EF}$(已知條件)，所以$\overline{BB'}=\overline{EE'}$。

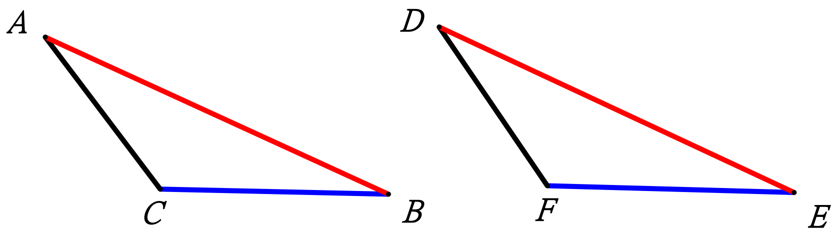
   在△ABB'和△DEE'，$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{AB'}=\overline{DE'}$，$\overline{BB'}=\overline{EE'}$，所以△ABB'≅△DEE'

   (根據 SSS 全等性質)。因此∠B=∠E。

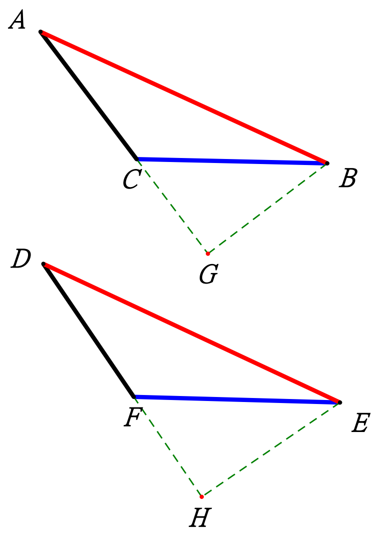
3. 在△ABC 和△DEF 的∠B=∠E，$\overline{BC}=\overline{EF}$，∠C=∠F，所以△ABC≅△DEF

   (根據 ASA 全等性質)，故得證 RHS 全等性質。

(2) 如果$\angle C=\angle F>90^{\circ}$，且$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，則$\triangle ABC\cong\triangle DEF$。



茲證明如下：



1. 延長$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{DF}$，分別過 B 點和 E 點各自作$\overline{AC}$和$\overrightarrow{DF}$的垂直線，垂足分別是 G 點和 H 點。

2. 直角$\triangle BGC$和直角$\triangle EFH$的$\angle G=\angle H(=90^{\circ})$，$\angle BCG=180-\angle ACB=180-\angle DFE=\angle EFH$，$\overline{BC}=\overline{EF}$(已知條件)，所以直角$\triangle BGC\cong$直角$\triangle EHF$(根據 AAS 全等性質)，因此$\overline{BG}=\overline{EH}$且$\overline{CG}=\overline{FH}$。

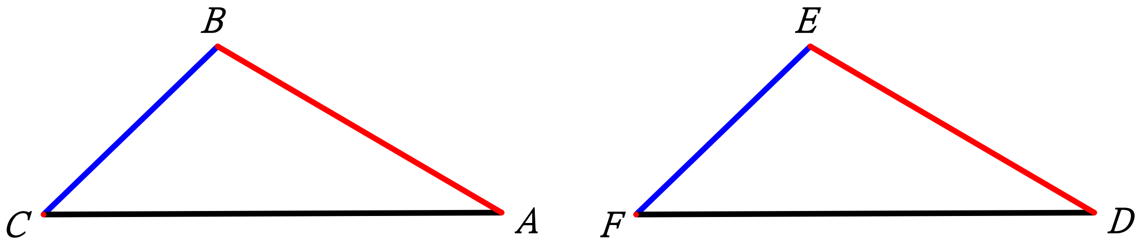
3. 直角$\triangle ABG$和直角$\triangle DEH$的$\overline{AB}=\overline{DE}$(已知)，$\overline{BG}=\overline{EH}$，根據 RHS 全等性質，可知直角$\triangle ABG\cong$直角$\triangle DEH$，因此$\overline{AG}=\overline{DH}$。

4. 因為$\overline{AG}=\overline{DH}$且$\overline{CG}=\overline{FH}$，因此$\overline{AG}-\overline{CG}=\overline{DH}-\overline{FH}$，所以$\overline{AC}=\overline{DF}$。

5. $\triangle ACB$和$\triangle DFE$的$\overline{AC}=\overline{DF}$，$\overline{AB}=\overline{DE}$(已知條件)，$\overline{BC}=\overline{EF}$(已知條件)，所以$\triangle ACB\cong\triangle DFE$(根據 SSS 全等性質)。

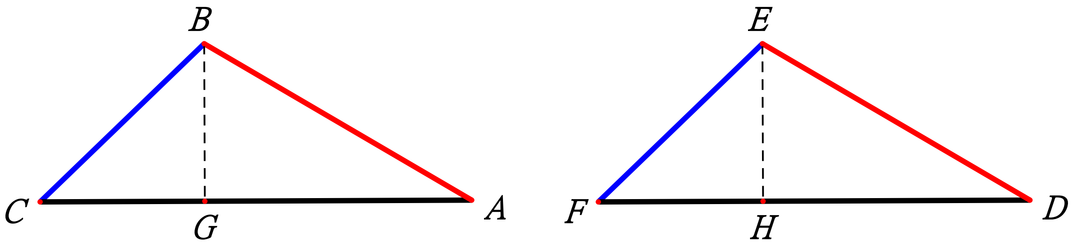
(3) 如果$\angle C=\angle F<90^{\circ}$，且$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，則△ABC 和△DEF 不一定是全等形。

(甲)、考慮狀況 1，如下圖



$\angle C=\angle F<90^{\circ}$，且$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，假設$\overline{AB}>\overline{BC}$不失其一般性，

分別過 B 點和 E 點作$\overline{AC}$和$\overline{DF}$的高，G 點和 H 點是垂足(如下圖)。



直角△BCG 和直角△EFH 的$\angle G=\angle H=90^{\circ}$，$\angle C=\angle F$(已知條件)，$\overline{BC}=\overline{EF}$(已知條件)，所以

直角△BCG≅直角△EFH(根據 AAS 全等性質)，因此$\overline{CG}=\overline{FH}\cdots(1)$，$\overline{BG}=\overline{EH}$。

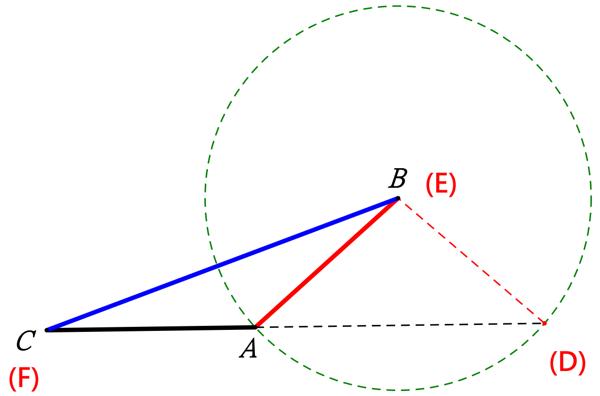
直角△BAG 和直角△EDH 的$\overline{AB}=\overline{DE}$(已知條件)，$\overline{BG}=\overline{EH}$，所以直角△BAG≅直角△EDH

(根據 RHS 全等性質)，因此$\overline{AG}=\overline{DH}\cdots(2)$。

由(1)(2)可知$\overline{AC}=\overline{DF}$，因為$\overline{AB}=\overline{DE}$(已知條件)，$\overline{BC}=\overline{EF}$(已知條件)，所以△ABC≅△DEF

(根據 SSS 全等性質)

(乙)、考慮狀況 2，如下圖

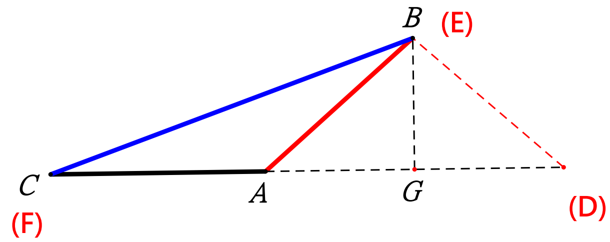


如圖，圓 B 半徑$\overline{AB}=\overline{DE}$且 C、A、D 三點在同一直線，B、E 兩點在同一位置，且 C、F 兩點在同一位置。顯然可吻合條件「$\angle C=\angle F<90^{\circ}$，且$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$」，其中 $\overline{AB}<\overline{BC}$ 。

如果 $\overline{BG}\perp\overline{DF}$ ，G 點是垂足，

則△ABC 的面積是$\dfrac{\overline{CA}\times\overline{BG}}{2}$ ，

△DEF 的面積是$\dfrac{\overline{DF}\times\overline{BG}}{2}$ ，因為



$\overline{DF}>\overline{AC}$，所以△DEF 的面積大於△ABC 的面積，也就是說△ABC 和△DEF 大小不一樣，因此△ABC 和△DEF 不是全等形。

由(甲)(乙)知如果$\angle C=\angle F$ 都是銳角，$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，則△ABC 和△DEF 不一定是全等形。

總結，

「△ABC 和△DEF，$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，$\angle C=\angle F$，

如果$\angle C=\angle F$ 都是直角或鈍角，則△ABC 和△DEF 是全等形。

如果$\angle C=\angle F$ 都是銳角，則△ABC 和△DEF 不一定是全等形。」

相關網頁: http://www.mathland.idv.tw/life/ssa.htm