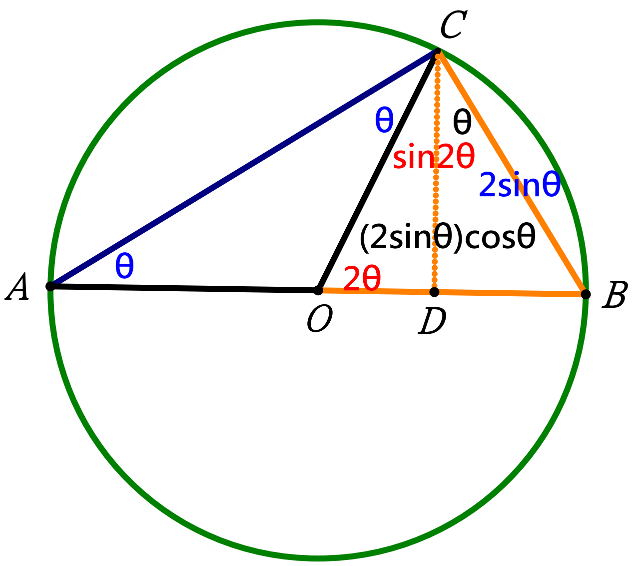
圖解三角函數的倍角公式

1. 圖解 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$



圓 O 直徑 $\overline{AB}$，$\overline{AO}=1$，$\angle CAO=\theta$，則

$\angle ACO=\theta$，$\angle COB=2\theta$。

作 $\overline{CD}$ 垂直於 $\overline{AB}$，D 點是垂足。

因為 $\angle COB=2\theta$ 且 $\angle CDO=90^\circ$，$\overline{CO}=1$，則

$\overline{CD}=\sin 2\theta$。…(1)

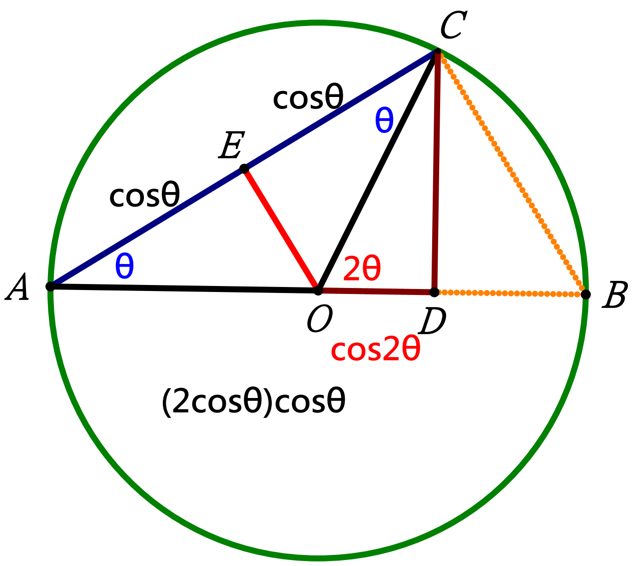
因為直角△ACB，$\angle ACB=90^\circ$，$\overline{AB}=2$，所以

$\overline{BC}=2\sin\theta$。

因為直角△CDB，$\angle CDB=90^\circ$，$\angle BCD=\theta$，$\overline{BC}=2\sin\theta$，所以 $\overline{CD}=(2\sin\theta)\cos\theta$。…(2)

由(1)(2)可知 $\sin 2\theta=(2\sin\theta)\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta$。

2. 圖解 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$



圓 O 直徑 $\overline{AB}$，$\overline{AO}=1$，$\angle CAO=\theta$，則

$\angle ACO=\theta$，$\angle COB=2\theta$。

作 $\overline{OE}$ 垂直於 $\overline{AC}$，E 點是垂足。

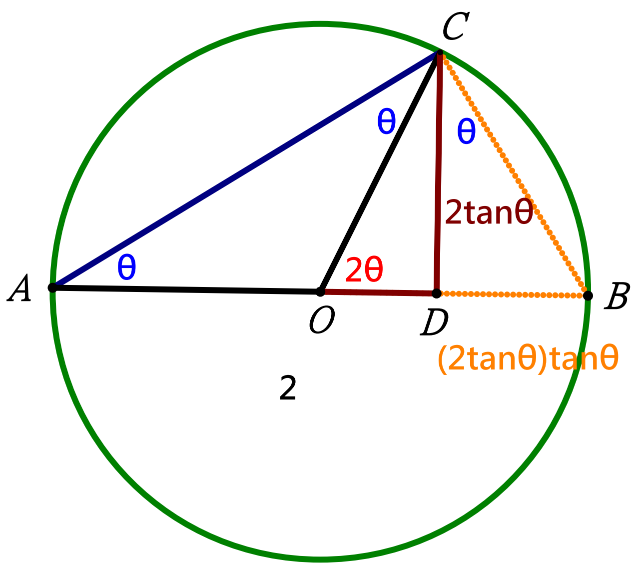
因為 $\overline{AE}=\overline{CE}$，$\overline{AC}=\overline{AE}+\overline{CE}=\cos\theta+\cos\theta$

$=2\cos\theta$，而且 $\overline{OD}=\cos 2\theta$。

已知 $\overline{OD}=\overline{AD}-\overline{AO}$，所以

$\cos 2\theta=2\cos\theta(\cos\theta)-1=2\cos^2\theta-1$。

3. 圖解 $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$



圓 O 直徑 $\overline{AB}$，令 $\overline{AD}$=2，∠CAO=θ ，則∠ACO=θ ，∠COB=2θ 。

作 $\overline{CD}$ 垂直於 $\overline{AB}$ ，D 點是垂足。

因為直角△CDA，∠CDA=90°，$\overline{AD}$=2，所以 $\overline{CD}$=2tanθ 。

因為直角△CDB，∠CDB=90°，$\overline{CD}$=2tanθ ，所以 $\overline{BD}$=(2tanθ)tanθ=2tan$^2\theta$ 。

因為直徑 $\overline{AB}$=2+2tan$^2\theta$ ，所以 $\overline{AO}$=1+ tan$^2\theta$ 。

因為 $\overline{OD}=\overline{AD}-\overline{AO}$ ，所以 $\overline{OD}$=2－(1+ tan$^2\theta$)=1－tan$^2\theta$ 。

因為直角△CDO，∠CDO=90°，∠COD=2θ ，所以 $\tan 2\theta=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{OD}}=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ 。

~昌爸工作坊　李信昌~