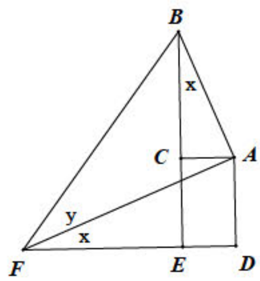
圖解正弦、餘弦的和角、倍角公式

李信昌

一、圖解正弦、餘弦的和角公式

右圖，$\overline{AC}\perp\overline{BE}$，$\overline{FA}\perp\overline{AB}$，$\overrightarrow{FE}//\overline{CA}$，$\overline{AD}//\overline{BE}$，$\overrightarrow{FE}$交$\overline{AD}$於 D 點。若$\angle AFD=x^{\circ}$，$\angle BFA=y^{\circ}$，則$\angle ABC=x^{\circ}$。



(一)、圖解 sin(x+y)

$$\sin(x+y)=\frac{\overline{BE}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{BC}+\overline{CE}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{FB}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BA}}{\overline{BA}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{FA}}{\overline{FA}}=$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}\times\frac{\overline{BA}}{\overline{FB}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{FA}}\times\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=\cos(x)\sin(y)+\sin(x)\cos(y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)\text{。}$$

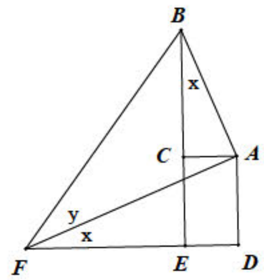
(二)、圖解 cos(x+y)

$$\cos(x+y)=\frac{\overline{OE}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{FD}-\overline{ED}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{FD}}{\overline{FB}}-\frac{\overline{ED}}{\overline{FB}}=$$

$$\frac{\overline{FD}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{FA}}{\overline{FA}}-\frac{\overline{ED}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BA}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{FD}}{\overline{FA}}\times\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}-\frac{\overline{ED}}{\overline{BA}}\times\frac{\overline{BA}}{\overline{FB}}=$$

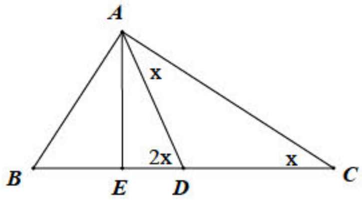
$$\frac{\overline{FD}}{\overline{FA}}\times\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}-\frac{\overline{CA}}{\overline{BA}}\times\frac{\overline{BA}}{\overline{FB}}=$$

$\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$　。



二、圖解正弦、餘弦的倍角公式

(一)、圖解 sin 2x



右圖，直角三角形 ABC，$\angle BAC=90^\circ$，D 是斜邊$\overline{BC}$的中點，$\overline{AE}\perp\overline{BC}$，E 是垂足。

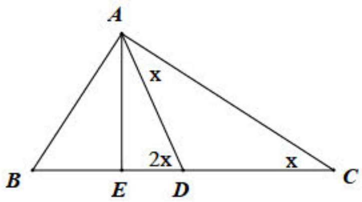
因為$\overline{DA}=\overline{DC}=\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，所以$\angle DAC=\angle DCA$。

如果$\angle DAC=x^\circ$，則$\angle DCA=x^\circ$，$\angle ADE=2x^\circ$。

直角△ABC 中，$\sin x=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$，$\cos x=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$，所以$\overline{AB}=\overline{BC}\times\sin x$ 且$\overline{AC}=\overline{BC}\times\cos x$。直角△AED 中，$\sin 2x=\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$，所以$\overline{AE}=\overline{AD}\times\sin 2x=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\sin 2x$。

因為直角 ABC 的面積$=\frac{\overline{AE}\times\overline{BC}}{2}=\frac{\overline{AB}\times\overline{AC}}{2}$，$\overline{AE}\times\overline{BC}=\overline{AB}\times\overline{AC}$，所以$(\frac{1}{2}\overline{BC}\times\sin 2x)\times\overline{BC}=(\overline{BC}\times\sin x)\times(\overline{BC}\times\cos x)$，因此$\sin 2x=2\sin x\cos x$。

(二)、圖解 cos 2x



右圖條件同(一)，由直角三角形子母相似性質可知$\overline{AC}^2=\overline{CE}\times\overline{CB}=(\overline{CD}+\overline{DE})\times\overline{CB}=$

$(\frac{1}{2}\overline{BC}+\overline{AD}\times\cos 2x)\times\overline{CB}=(\frac{1}{2}\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{BC}\times\cos 2x)\times\overline{CB}$，因此

$(\overline{BC}\times \cos x)^2=(\frac{1}{2}\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{BC}\times\cos 2x)\times\overline{CB}$，$2\cos^2 x=1+\cos 2x$，

所以 $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2(1-\sin^2 x)-1=1-2\sin^2 x$，或

$\cos 2x=2\cos^2 x-1=2\cos^2 x-(\sin^2x+\cos^2x)=\cos^2 x-\sin^2x$。