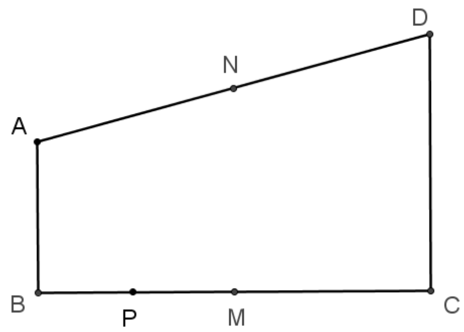
跟國中生淺談柯西不等式

李信昌(昌爸)/退休國中老師　2014.12.31

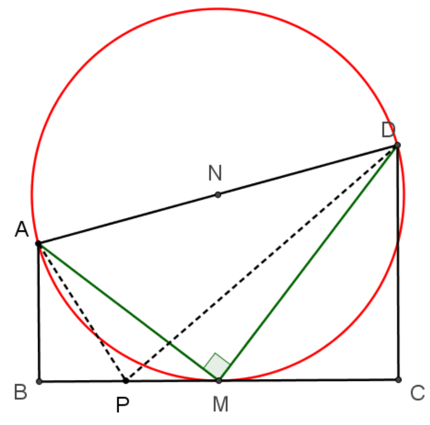
柯西不等式(Cauchy－Schwarz inequality)是高一生的數學學習課程，可是國三生已經具備了初識柯西不等式的能力，可以鼓勵他們動動腦想一想。為了向國中生介紹柯西不等式，首先設計一個梯形 ABCD，如圖一，底 $\overline{AB}=a$，底 $\overline{DC}=b$，∠ABC＝∠DCB＝90°。其中，$\overline{AD}=a+b$，$\overline{BC}=2\sqrt{ab}$，M 點是 $\overline{BC}$ 的中點，N 是 $\overline{AD}$ 的中點，P 點是 $\overline{BC}$ 上除了 M 點之外的任意一點。



圖一

(1)、如圖二，說明為什麼∠AMD＝90° 而且∠APD 是銳角。

取 $\overline{AD}$ 的中點 N，連接 N 點、M 點。因為 $\overline{MN}$ 是梯形 ABCD 的中線，所以 $\overline{NM}=\dfrac{a+b}{2}$，因此 $\overline{AN}=\overline{ND}=\overline{NM}=\dfrac{a+b}{2}$。若以 N 點為圓心，$\overline{AD}$ 為直徑作圓，此圓會通過 M 點，所以∠AMD＝90°。



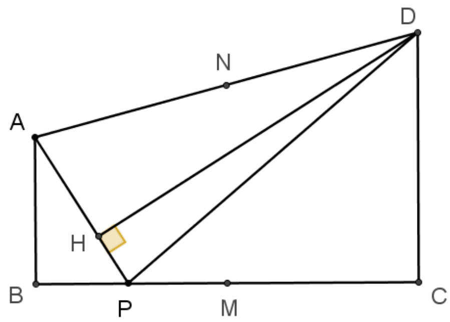
圖二

如圖二，直線 BC 是圓 N 過 M 點的切線，因為 P 點在 $\overline{BC}$ 上，且 P≠M，所以 P 點在圓 N 外。已知圓外角∠APD 的度數等於所對兩圓弧差的一半，因為 $\overline{AD}$ 對半圓，所以∠APD 是銳角。

(2)、考慮△APD：如圖三，因為∠APD 是銳角，過 D 點作 $\overline{DH} \perp \overline{AP}$，H 是垂足，因此 $\overline{DP} > \overline{DH}$，

所以 △APD 面積＝$\dfrac{\overline{AP}\times\overline{DH}}{2} < \dfrac{\overline{AP}\times\overline{DP}}{2}$，即△APD 面積小於$\dfrac{\overline{AP}\times\overline{DP}}{2}$，其中

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BP}^2}$， $\overline{DP}=\sqrt{\overline{CP}^2+\overline{DC}^2}$ 。



圖三

因為△APD 面積＝梯形 ABCD 面積－(△ABP 面積＋△DPC 面積)＝

$$\frac{(\overline{AB}+\overline{DC})(\overline{BP}+\overline{CP})}{2}-\left(\frac{\overline{AB}\times\overline{BP}}{2}+\frac{\overline{CP}\times\overline{DC}}{2}\right)=\frac{\overline{AB}\times\overline{CP}+\overline{BP}\times\overline{DC}}{2}$$

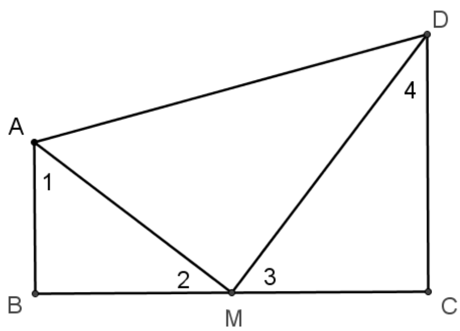
而且△APD 面積小於$\dfrac{\overline{AP}\times\overline{DP}}{2}$，所以

$$\frac{\overline{AB}\times\overline{CP}+\overline{BP}\times\overline{DC}}{2}<\frac{(\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BP}^2})(\sqrt{\overline{CP}^2+\overline{DC}^2})}{2}$$ ，因此

$$(\overline{AB}\times\overline{CP}+\overline{BP}\times\overline{DC})^2<(\overline{AB}^2+\overline{BP}^2)(\overline{CP}^2+\overline{DC}^2)$$ 。

(3)、考慮直角△AMD，∠AMD＝90° ：如圖四，∠2＋∠3＝∠2＋∠1＝90° ，因此∠3＝∠1，

同理∠2＝∠4，所以△ABM~△MCD (AA 相似)，可得$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{MC}}=\dfrac{\overline{BM}}{\overline{CD}}$ 。



圖四

因為△AMD 面積＝梯形 ABCD 面積－(△ABM 面積＋△MCD 面積)＝

$$\frac{(\overline{AB}+\overline{DC})(\overline{BM}+\overline{CM})}{2}-(\frac{\overline{AB}\times\overline{BM}}{2}+\frac{\overline{MC}\times\overline{DC}}{2})=\frac{\overline{AB}\times\overline{CM}+\overline{BM}\times\overline{DC}}{2}$$

而且△AMD 面積＝$\frac{(\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BM}^2})(\sqrt{\overline{CM}^2+\overline{DC}^2})}{2}$，所以

$$\frac{\overline{AB}\times\overline{CM}+\overline{BM}\times\overline{DC}}{2}=\frac{(\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BM}^2})(\sqrt{\overline{CM}^2+\overline{DC}^2})}{2}$$

，因此

$$(\overline{AB}\times\overline{CM}+\overline{BM}\times\overline{DC})^2=(\overline{AB}^2+\overline{BM}^2)(\overline{CM}^2+\overline{DC}^2)$$

。

綜合上述(2)和(3)可以推論

若 a、b、c、d 是正數，則 $(ac+bd)^2 \leqq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$。

當 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ 時，$(ac+bd)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$。