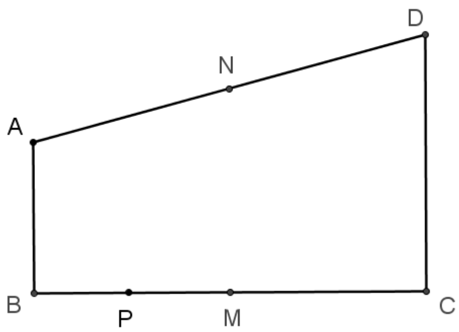
跟國中生淺談柯西不等式

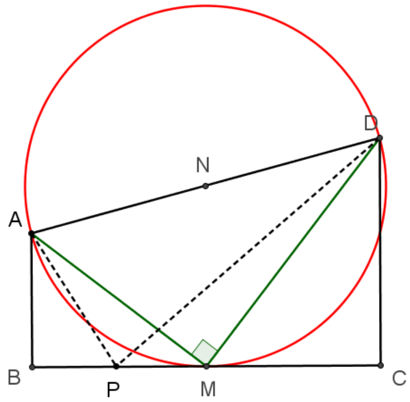
李信昌(昌爸)/退休國中老師　2014.12.31

雖然柯西不等式(Cauchy–Schwarz inequality)被安排在高一的數學，其實國三的學生已經具備認識柯西不等式的能力了，可以介紹給他們並鼓勵動腦想想看。

為了向國中生介紹柯西不等式，可以先設計一個梯形 ABCD(圖一)，底$\overline{AB}=a$，底$\overline{DC}=b$，$\angle ABC=\angle DCB=90^\circ$，而且$\overline{AD}=a+b$，$\overline{BC}=2\sqrt{ab}$，M 點是$\overline{BC}$的中點，N 是$\overline{AD}$的中點，P 點是$\overline{BC}$上除了 M 點之外的任意一點。



圖一



圖二

(1)、說明為什麼$\angle AMD=90^\circ$，而且$\angle APD$是銳角。

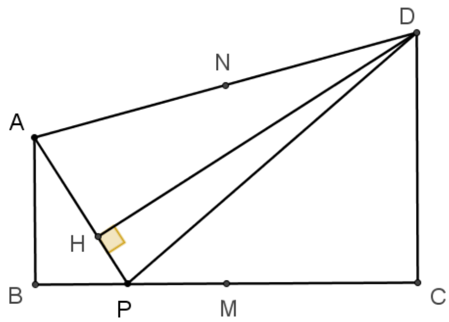
取$\overline{AD}$的中點 N，連接 N 點、M 點。因為$\overline{MN}$是梯形 ABCD 的中線，所以$\overline{NM}=\dfrac{a+b}{2}$，因此$\overline{AN}=\overline{ND}=\overline{NM}=\dfrac{a+b}{2}$。若以 N 點為圓心，$\overline{AD}$為直徑作圓，此圓會通過 M 點(如圖二)，所以$\angle AMD=90^\circ$。

因為$\overline{NM}$是梯形 ABCD 的中線，所以 $\overline{NM}//\overline{AB}$。因為$\overline{AB}\perp\overline{BC}$且$\overline{NM}//\overline{AB}$，所以$\overline{NM}\perp\overline{BC}$，因此直線 BC 是圓 N 過 M 點的切線。因為 P 點在$\overline{BC}$上，且 P≠M，所以 P 點在圓 N 外。已知圓外角∠APD 的度數等於所對兩圓弧差的一半，因為$\overline{AD}$對半圓，所以∠APD 是銳角。

(2)、圖三，因為∠APD 是銳角，過 D 點作$\overline{DH}\perp\overline{AP}$，H 是垂足，因此$\overline{DP}>\overline{DH}$，

所以 △APD 面積 = $\dfrac{\overline{AP}\times\overline{DH}}{2}<\dfrac{\overline{AP}\times\overline{DP}}{2}$ ，即△APD 面積小於$\dfrac{\overline{AP}\times\overline{DP}}{2}$，其中

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BP}^2}$ ， $\overline{DP}=\sqrt{\overline{CP}^2+\overline{DC}^2}$ 。



圖三

因為△APD 面積 = 梯形 ABCD 面積 -（ △ABP 面積 + △DPC 面積 ）=

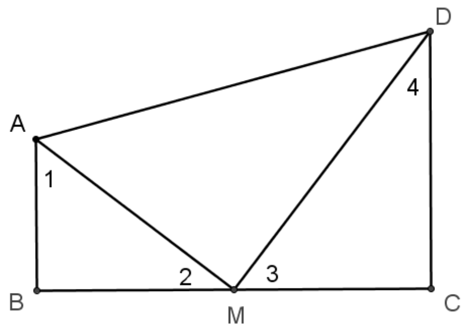
$\dfrac{(\overline{AB}+\overline{DC})(\overline{BP}+\overline{CP})}{2}$ -（$\dfrac{\overline{AB}\times\overline{BP}}{2}$ + $\dfrac{\overline{CP}\times\overline{DC}}{2}$ ）= $\dfrac{\overline{AB}\times\overline{CP}+\overline{BP}\times\overline{DC}}{2}$ 。

因為 △APD 面積小於$\dfrac{\overline{AP}\times\overline{DP}}{2}$，所以

$\dfrac{\overline{AB}\times\overline{CP}+\overline{BP}\times\overline{DC}}{2}<\dfrac{(\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BP}^2})(\sqrt{\overline{CP}^2+\overline{DC}^2})}{2}$ ，因此

$(\overline{AB}\times\overline{CP}+\overline{BP}\times\overline{DC})^2<(\overline{AB}^2+\overline{BP}^2)(\overline{CP}^2+\overline{DC}^2)$ 。

(3)、圖四，因為$\triangle AMD$ 中$\angle AMD = 90^\circ$ ，所以$\angle 2 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 1 = 90^\circ$ ，因此$\angle 3 = \angle 1$，同理$\angle 2 = \angle 4$，所以$\triangle ABM \sim \triangle MCD$ (AA 相似)，可得 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{MC}} = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{CD}}$ 。



圖四

因為 $\angle AMD = 90^\circ$ ，所以 $\triangle AMD$ 面積 $= \dfrac{(\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BM}^2})(\sqrt{\overline{CM}^2 + \overline{DC}^2})}{2}$ ，

已知 $\triangle AMD$ 面積 $= \dfrac{\overline{AB} \times \overline{CM} + \overline{BM} \times \overline{DC}}{2}$ ，因此

$\dfrac{\overline{AB} \times \overline{CM} + \overline{BM} \times \overline{DC}}{2} = \dfrac{(\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BM}^2})(\sqrt{\overline{CM}^2 + \overline{DC}^2})}{2}$ ，得

$(\overline{AB} \times \overline{CM} + \overline{BM} \times \overline{DC})^2 = (\overline{AB}^2 + \overline{BM}^2)(\overline{CM}^2 + \overline{DC}^2)$ 。

綜合上述(2)和(3)可以推論

若 a、b、c、d 是正數，則 $(ac + bd)^2 \leqq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$。

當 $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ 時，$(ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$。