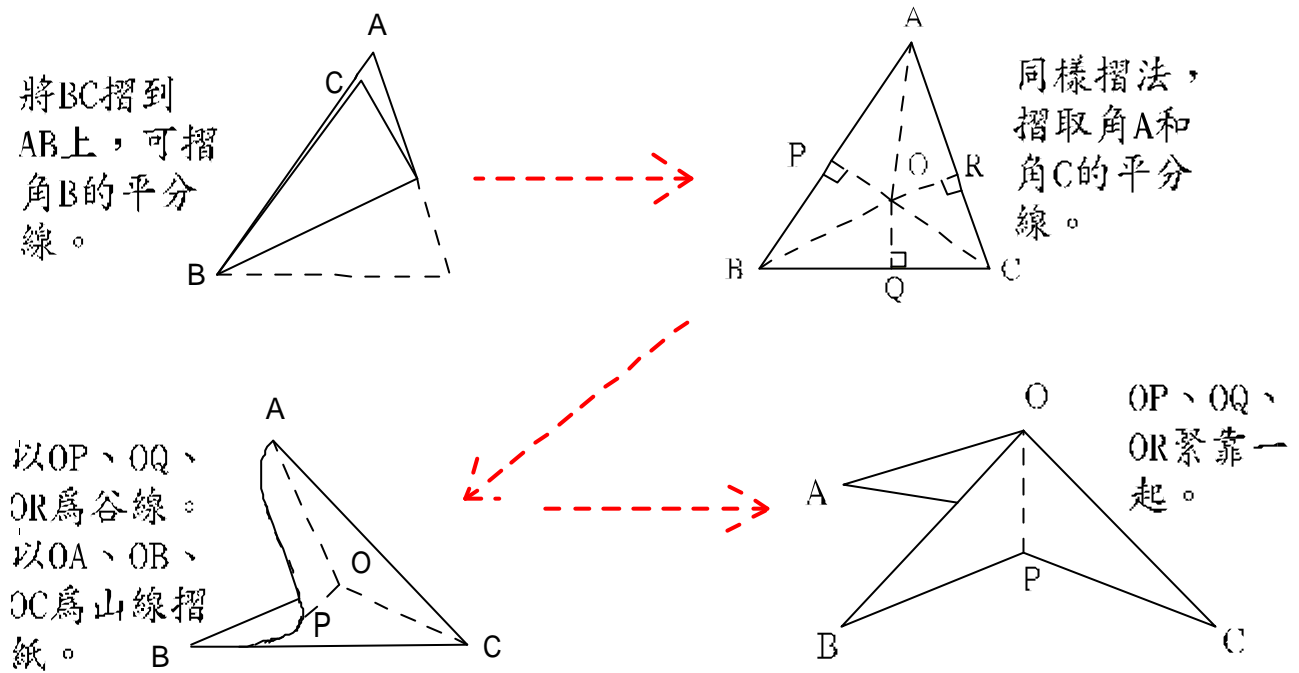


轉動圖形解題

報告人--李信昌 老師

以往，國中數學幾何輔助線的課程設計著墨不多，學生往往局限於「眼前圖形」，解題能力無法大幅提升。九年一貫之後，民間出版社可以編輯出版課本，有些作者在幾何主題中設計摺紙活動，藉此來引導學生觀察，進而協助學生初步認識幾何性質（現象），使用摺紙作為畫輔助線解題能力的前置經驗，是一個相當好的選擇；此外，協助學生了解圖形的全等意義也有幫助。

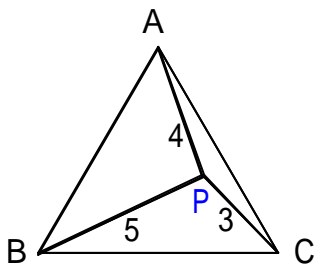
利用摺紙說明內心到各邊等距離



因此，角平分線交點O到各邊距離相等。  
即 $OP=OQ=OR$ 。

如果將摺紙延伸至圖形轉動，解決幾何問題的能力可以更上一層樓，我就以昌爸工作坊數學網站裡經常被學生提問討論的兩道題為例說明。

(1)、

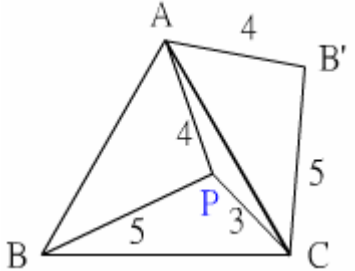
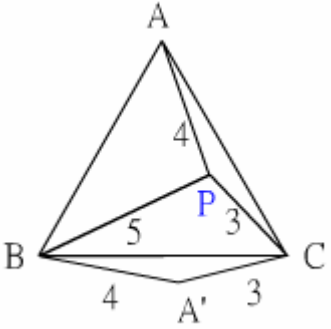
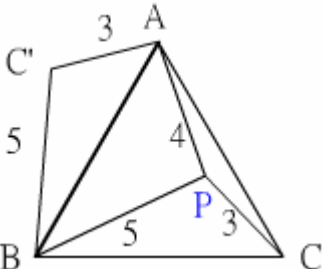
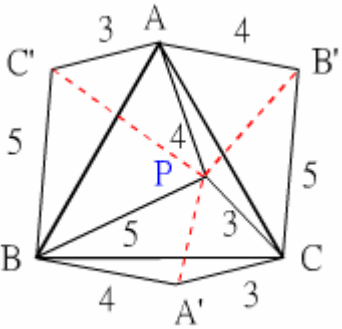


正  $ABC$  內有一點  $P$ ， $\overline{PA} = 4$ ， $\overline{PB} = 5$ ， $\overline{PC} = 3$ 。

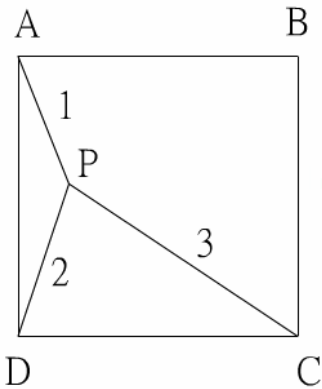
試求正  $ABC$  的面積 = ?

(建議：考慮國中生的處理能力，條件中的數據應該是一組商高數， $m^2+n^2$ 、 $2mn$ 、 $m^2-n^2$ ，其中， $m$  和  $n$  是正整數。)

解題策略：

	<p>1. 以 A 點作基點，將 <math>\triangle ABP</math> 逆時鐘旋轉 <math>60^\circ</math>，<math>\overline{AB}</math> 會和 <math>\overline{AC}</math> 重疊。 此時，<math>\triangle ABP \cong \triangle ACB'</math>。</p>
	<p>2. 以 C 點作基點，將 <math>\triangle ACP</math> 逆時鐘旋轉 <math>60^\circ</math>，<math>\overline{AC}</math> 會和 <math>\overline{BC}</math> 重疊。 此時，<math>\triangle CAP \cong \triangle CBA'</math>。</p>
	<p>3. 以 B 點作基點，將 <math>\triangle BCP</math> 逆時鐘旋轉 <math>60^\circ</math>，<math>\overline{BC}</math> 會和 <math>\overline{BA}</math> 重疊。 此時，<math>\triangle BCP \cong \triangle BAC'</math>。</p>
	<p>4. 綜合上述步驟可知六邊形 <math>AB'CA'BC'</math> 面積是正 <math>\triangle ABC</math> 的 2 倍。 在六邊形 <math>AB'CA'BC'</math> 中，<math>\triangle PAB'</math>、<math>\triangle PBC'</math> 和 <math>\triangle PCA'</math> 都是正三角形。根據商高逆定理可知三邊長是 3、4、5 的三角形是直角三角形，所以 <math>\triangle PAC'</math>、<math>\triangle PBA'</math> 和 <math>\triangle PCB'</math> 都是直角三角形。而</p> <p>正 <math>\triangle PAB'</math> 面積 = <math>\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}</math>，</p> <p>正 <math>\triangle PBC'</math> 面積 = <math>\frac{\sqrt{3}}{4} \times 5^2 = \frac{25\sqrt{3}}{4}</math>，</p> <p>正 <math>\triangle PCA'</math> 面積 = <math>\frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}</math>，</p> <p><math>\triangle PAC'</math> 面積 = <math>\triangle PBA'</math> 面積 = <math>\triangle PCB'</math> 面積 = <math>\frac{3 \times 4}{2} = 6</math>。</p> <p>所以正 <math>\triangle ABC</math> 面積 = <math>(18 + \frac{50\sqrt{3}}{4}) \div 2 = 9 + \frac{25\sqrt{3}}{4}</math></p>

(2) 、



正方形 ABCD 內有一點 P 到頂點 A、B、D 的距離分別是 1、2、3。試求  $\angle APD$  的度數？

解題策略：

	<p>以 D 點作基點，將正方形 ABCD 逆時鐘旋轉 <math>90^\circ</math>，此時，A 點旋轉到 A' 點的位置。</p> <p>因為 P 點旋轉 <math>90^\circ</math> 到 P' 點，所以 <math>\angle PDP' = 90^\circ</math> 而且 <math>\triangle PDP'</math> 是等腰直角，因此 <math>\angle P'PD = 45^\circ</math>；<math>PP' = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}</math>。</p> <p>又因為 <math>3^2 = 1^2 + \sqrt{8}^2</math>，根據商高逆定理可知 <math>\triangle APP'</math> 是直角，<math>\angle APP' = 90^\circ</math>。</p> <p><math>\angle APD = \angle APP' + \angle P'PD = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ</math>。</p>
--	--

(本文結束)