

剖析「整數加減與式子加減」的實物教具教學法

92.8.21 李信昌老師報告
新泰國中數學領域教學研究會

「傳統數學教學上，常把觀念與演算截然二分。然數學演算並不只是機械式計算操作而已。某類型數學問題演算的純熟，常能同時促使新舊數學觀念的連結與落實。演算亦是學童獲得新數學經驗的方法，新的經驗將會再形成學生下一階段新主題學習所需的具體經驗。」
教師如何設計教材連結新舊數學觀念，協助學生純熟演算呢？

關於九年一貫數學領域的整數加減法，目前大多數出版社在這個單元的教學設計，都採行實物教具教學法，但是也有一家則採行以往國編本的數線表示法。紅綠魔豆、白黑棋子，這種教具教學法應該是根源於以前中國人用『算籌』的工具來計算，那時候，用黑色的算籌表示正數，用紅色的算籌表示負數。實物教具教學法應用於整數加減法，教學過程實則一套「正負白黑，加減取捨，對消補 0」的思考型計算，它可以彌補反覆機械計算練習所缺乏的觀念思考。

其實，數線法也是一套簡易的方法，加（前進）減（後退）正（同向）負（反向），且能提供延伸學習有理數與無理數的基礎經驗，但是它缺乏對於符號式子加減、方程等量加減觀念的連結；而且不太容易讓學童培養數學的直觀感覺，例如負數與減法。

「在認知能力上，直觀是思維流暢的具體展現；在能力培養上，直觀讓學生能從根本上，擺脫數學形式規則的束縛，豐富學童在抽象層次上的想像力與觀察能力，這二者是兒童數學智能發展中的重要指標。」由實物教具的操作來引起學生直覺數學感覺，經由教具來啟發學生的思考能力進入形式抽象層次。

如何讓學生獲得新經驗並且再形成下一階段新主題學習所需的具體經驗呢？我以整數的加減推衍到程式等量加減的教學過程來說明。以紅綠魔豆或白黑棋子實物教具教學為例：

「正負白黑，加減取捨，對消補 0」

先界定

1 個 表示 1；

2 個 即 表示 2； 依此類推

1 個 表示 -1；

2 個 即 表示 -2； 依此類推

並以 表示 0。

實物教具計算

$$(1) \quad 4 + (-3) = 1$$

	4	
	+ -3	
對消	還有	1

教師操作教具教學後，可以符號形式來解釋過程。將上述過程符號形式化，也就是下列算式 $4 + (-3) = (1 + 3) + (-3) = 1 + [3 + (-3)] = 1 + 0 = 1$ 。過程中用到新數學觀念加法結合律（翰林版一上第一章）。如果學生能熟用這種對消（這是相反數相加結果是 0 的前置經驗）的模式來思考計算，那麼遇到較複雜的數字計算應該不會有困難。

例如： $78 + (-60)$
 $= (18 + 60) + (-60)$
 $= 18 + \mathbf{[60 + (-60)]}$ 加法結合律
 $= 18$

(2) $4 + (-5) = -1$

具體操作

	4
	+ -5
對消	還有 -1

形式化解釋

$4 + (-5) = 4 + \mathbf{[(-4) + (-1)]} = [4 + (-4)] + (-1) = 0 + (-1) = -1$ 加法結合律

為了熟用已建立的思考模式，精熟練習是必要方式，教師可以提供例題給學生練習，但是數字不必太複雜。例如：

$85 + (-100) = 85 + (\underline{-85} + \underline{\quad}) = \mathbf{[85 + (-85)]} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$

(3) $4 - (-3) = 7$

要從 \quad 之中移走 \quad ，對學生來說這是不可能發生的。其實，就連法國的大數學家巴斯卡(1623-1662)也曾說過：「要從 0 減去 4，這純粹就是胡說八道。」，學生的反應也是正常的。但是「補 0」將不可能變可能了，如果補 3 個 0，也就是說 $4+0+0+0$ ，操作教具教學如下：

(甲)

$4 = 4 + 0 + 0 + 0$

此時，要求學生捨去 3 個 \quad ，他們的反應將相當自然，並指出

(乙)

結果是 7 個 \quad (啟發思考)

教師將(甲)~(乙)過程形式化解釋

$4 - (-3)$
 $= (4 + 0 + 0 + 0) - (-3)$
 $= \{4 + \mathbf{[1 + (-1)]} + \mathbf{[1 + (-1)]} + \mathbf{[1 + (-1)]}\} - (-3)$
 $= (4 + 3) + \{ \mathbf{[(-1) + (-1) + (-1)]} - (-3) \}$ 交換律、結合律

$$= 4 + 3 = 7$$

關於解析計算過程的數學觀念形式思考，我建議只需在課堂引導思考教學使用。對於學生實際計算上，可以進一步導引學生去觀察算式並能說出「減負3相當於加3」，並要求學生能利用觀察結果熟練地運用在計算上即可。教師要注意的是，「沒有效率、容易造成錯誤的演算法，卻會加深學習的沮喪感，使學童逐漸放棄學習」，所以筆紙測驗「計算題」時不必要求學生將思考過程寫出，而數字也不要太複雜。如果要評量學生是靠機械記憶計算法或者已建立觀念思考模式，採用口試是比較適當的。

如何將以上學習經驗推衍至式子的加減運算呢？很可惜的是，教科書在這方面的編寫嫌不足。使用「天平、砝碼」為教具，又無法銜接「魔豆棋子、白黑棋子」的學習舊經驗，以致不能對 $x - (-2x)$ 此類計算題做出系統的完整說明。

其實，我們可以舊經驗的相同定義方式，界定

1 個 表示 $1x$ ，簡記 x ；

2 個 表示 $2x$ ； 依此類推

1 個 表示 $-1x$ ，簡記 $-x$

2 個 表示 $-2x$ ； 依此類推

並定義 對消後是 0；補 1 個 0 即 補進一組 。

你應該發現以上的定義方式和 1, 2, 0, -1, -2, 是雷同的，只有將白黑棋子換作白黑方牌而已。

(1) 現在，我們實際操作實物教具來演示 $x - (-2x) = 3x$

當然無法從 1 個 之中，移走 2 個 ，這之前有類似經驗，當時是利用「補 0」來解決問題。所以，你將補兩個 0，也就是說 ，左式是 $x+0+0$ 。然後，移走 2 個 ，結果是 ，3 個 ，也就 $3x$ 。

教師可以多提供幾題計算題，如 $x - (-3x) = ?$ ， $2x - (-x) = ?$ 要求學生觀察算式過程，而能說出「減 $(-x)$ 相當於加 x 」，並在往後的計算中能熟悉運用。

(2) 實物教具演示 計算 $-2x - (3x+1) = -5x + (-1)$

從 中移走 ，得先「補 0」，應補 。

此後，從 移走 ，結果 ，也就是 $-5x + (-1)$ 。

推衍至一元一次方程式的等量加減

(1) 實物教具演示 解 $x = -x + (-2)$

=

啟發學生經由累積的舊經驗，善用「補 0」與對消，應該很容易解出 x 值。

等式兩邊等量加上 ，結果 = ，所以 = ，即 $x = -1$ 。

(2) 實物教具演示 解 $-2x - 1 = x - 4$

=

先在等式兩邊等量加上 ，結果 = ， =

以符號表示就是 $2x - 2x - 1 = 2x + x - 4$ ， $-1 = 3x - 4$

$\square = \square$, 在等式兩邊等量加 4 , 也就是 $\square + 4 = \square + 4$, 所以 $\square = \square$, 因此 $\square = \square$ 。
 以符號表示就是 $-1 = 3x - 4$, $4 - 1 = 4 + 3x - 4$, $3 = 3x$, $x = 1$ 。

七年級學生在小學所使用的教科書，作者編寫教材大抵是揉合兒童的生活經驗、直觀和在培養中的抽象思考方法。這是兒童在國中學習抽象的代數以及其它學科（例如理化）時，絕佳的前置經驗，當時直觀的培養，直接影響學童在國中學習的好壞。身為七年級數學教師應該在課程設計上，時時自我審核是否能在教學上銜接學生的前置經驗，是否能做好連結新舊數學觀念。

(本文完)