

約分帶給學生做多項式除法的困擾

解析人：李信昌老師

問題陳述：學生總想簡化多項式除法，以求縮短計算過程，卻往往誤用約分，造成解題的困擾。有如小學生做 $12 \div 9$ ，就出現 $(12 \div 3) \div (9 \div 3) = 4 \div 3 = 1 \cdots 1$ 的錯誤一般。

實例：求 $(x+1)(x+2)^2 \div (x+1)^2$ 的商式與餘式

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x^2+2x+1 \overline{) x^3+5x^2+8x+4} \\ \underline{x^3+2x^2+x} \\ 3x^2+7x+4 \\ \underline{3x^2+6x+3} \\ x+1 \end{array}$$

以上是正確解法，可是有些學生卻因一心求快，出現了下列錯誤解法

錯誤解題

被除式和除式同時除以 $(x+1)$

$$(x+1)(x+2)^2 \div (x+1)^2 = (x+2)^2 \div (x+1) = x+3 \cdots \cdots 1$$

商式 $= x+3$ ，餘式 $= 1$

解析

因為 被除式 $=$ 除式 \times 商式 $+ 餘式$ ，令 $Q(x)$ 是 x 的多項式，

則 $\frac{\text{被除式}}{Q(x)} = \frac{\text{除式}}{Q(x)} \times \text{商式} + \frac{\text{餘式}}{Q(x)}$ ，顯然已經不是原來的多項式除法，而是

$\frac{\text{原被除式}}{Q(x)} \div \frac{\text{原除式}}{Q(x)}$ 的新除法，而結果是兩者商式一樣，新餘式則是 $\frac{\text{原餘式}}{Q(x)}$ 。

原問題算式的被除式和除式同時除以 $(x+1)$ ，商式不受影響，如果不是整除，則將直接改變了餘式，新餘式成為原來的餘式除以 $(x+1)$ 。

如果將 $(x+2)^2 \div (x+1) = x+3 \cdots \cdots 1$ 改寫為

$$\frac{(x+2)^2}{x+1} = (x+3) + \frac{1}{x+1}$$

再將上式各項乘以 $\frac{x+1}{x+1}$ ，得 $\frac{(x+1)(x+2)^2}{(x+1)^2} = (x+3) + \frac{(x+1)}{(x+1)^2}$

就可得到正確的餘式 $x+1$ 。

建議學生將被除式和除式展開化簡後以長除法解題，可避免約分帶給他們做多項式除法的困擾。