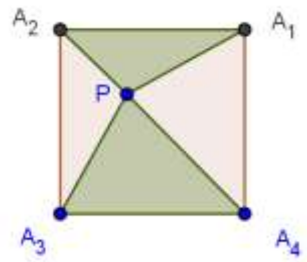
閒談正偶數邊形

李信昌

2010 年的 12 月，這天寒流來了，兩個九年級科任班去畢業旅行，七年級導師班正在學習化簡一次式，少了幾堂課的空閒，正好接續上篇「指令 sequence 應用實例」一文，證明實測後猜想。

就由正四邊形開始，P 點在正四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 內，顯然△PA_1A_2 面積+△PA_3A_4 面積=正四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 面積×$\frac{1}{2}$。那麼，正六邊形是否有相同的結果呢？這猜想應該不為難自己吧!可是一體適用證明猜想的想法可就要動動腦筋了!

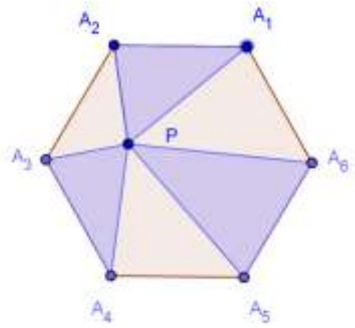


嘗試畫出直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 圍成正△$B_1B_2B_3$，如下圖。因為

△PA_1A_2 面積=△PB_1B_2 面積×$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}}$，

△PA_3A_4 面積=△PB_2B_3 面積×$\frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{B_2B_3}}$，

△PA_5A_6 面積=△PB_3B_1 面積×$\frac{\overline{A_5A_6}}{\overline{B_3B_1}}$，其中 $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}}=\frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{B_2B_3}}=\frac{\overline{A_5A_6}}{\overline{B_3B_1}}=\frac{1}{3}$。



因此，△PA_1A_2 面積+△PA_3A_4 面積+△PA_5A_6 面積=

(△PB_1B_2 面積+△PB_2B_3 面積+△PB_3B_1 面積) ×$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}}$=

正△$B_1B_2B_3$ 面積×$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}}$=正△$B_1B_2B_3$ 面積×$\frac{1}{3}$。

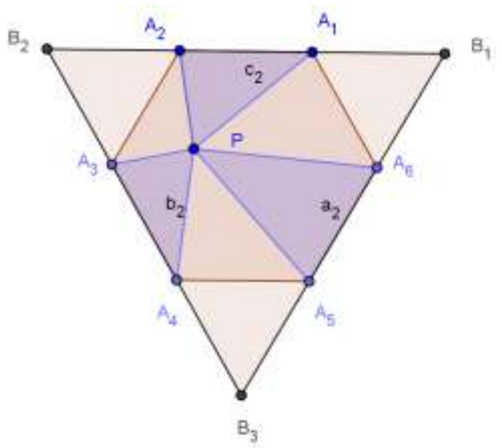
再來，就是看看正六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 和正△$B_1B_2B_3$ 的面積了。

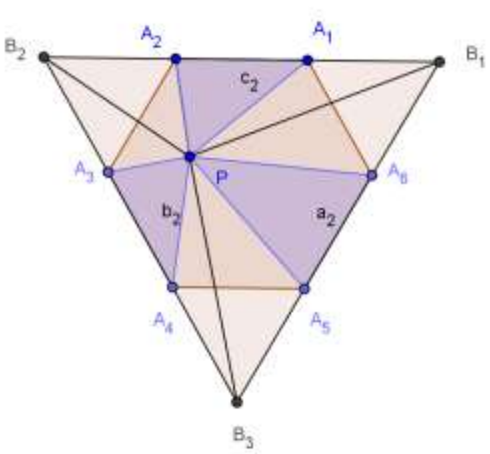
正六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的面積=$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{A_1A_2}^2\times 6=\frac{3\sqrt{3}}{2}\overline{A_1A_2}^2$，

正△$B_1B_2B_3$ 的面積=$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{B_1B_2}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(3\overline{A_1A_2})^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}\overline{A_1A_2}^2$。

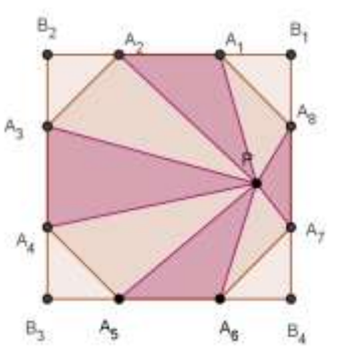
所以△PA_1A_2 面積+△PA_3A_4 面積+△PA_5A_6 面積=$\frac{9\sqrt{3}}{4}\overline{A_1A_2}^2\times\frac{1}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\overline{A_1A_2}^2=$

$\frac{1}{2}$×正六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的面積。就正六邊形，證明猜想有理，事實存在。

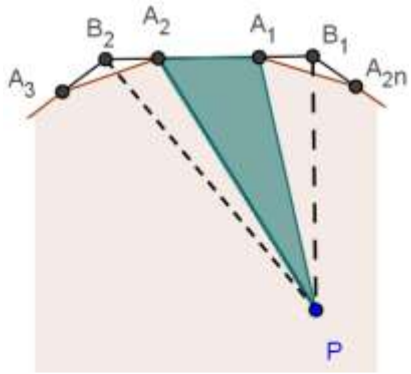




依循相同方法，可證明正八邊形也有同樣的結果，到此應該對這個方法有自信了。



終於得嚴謹考驗這個方法來證明是否正 2n 邊形內一 P 點，$\sum_{i=1}^{n}(\Delta PA_{2i-1}A_{2i}\text{面積})$ 是正 2n 邊形面積的 $\frac{1}{2}$。

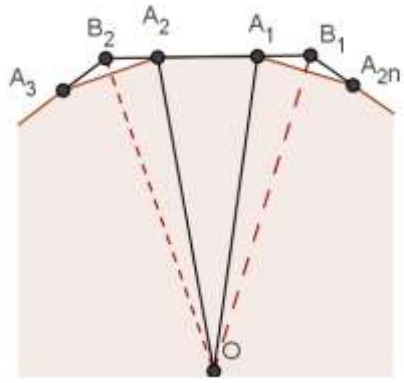


如圖，正 2n 邊形 $A_1A_2..A_{2n}$ 內一 P 點，則 $\sum_{i=1}^{n}\Delta PA_{2i-1}A_{2i}$ 面積是正 n 邊形 $B_1B_2..B_n$ 面積的 $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}}$。

如果正 2n 邊形 $A_1A_2..A_{2n}$ 的外接圓圓心 O 到 $\overline{A_1A_2}$ 的距離是 h，則

正 2n 邊形 $A_1A_2..A_{2n}$ 的面積是 $\frac{\overline{A_1A_2}\times h}{2}\times 2n$，所以

$\sum_{i=1}^{n}(\Delta PA_{2i-1}A_{2i}\text{面積})=((\frac{\overline{B_1B_2}\times h}{2}\times n)\times\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}}=\frac{\overline{A_1A_2}\times h}{2}\times n=\frac{\overline{A_1A_2}\times h}{4}\times 2n$，這



結果是正 2n 邊形 $A_1A_2..A_{2n}$ 面積的 $\frac{1}{2}$。證明猜想是正確，即

「正 2n 邊形內一 P 點，則 $\sum_{i=1}^{n}(\Delta PA_{2i-1}A_{2i}\text{面積})$ 是正 2n 邊形面積的 $\frac{1}{2}$

」

相關資料: http://www.mathland.idv.tw/teaching/指令 sequence 應用實例.pdf

本文作者任教於新北市新莊區新泰國中(2010.12)