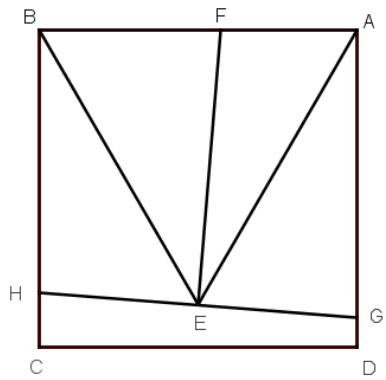
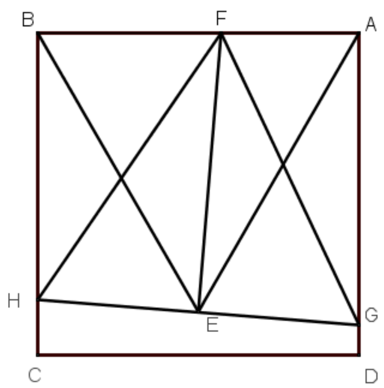
正方形內接最大正三角形

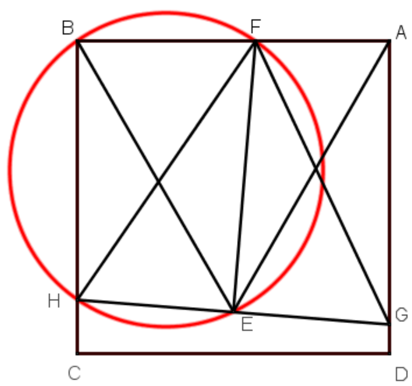
李信昌
新北市立新泰國中退休老師

正方形 ABCD，以 $\overline{AB}$ 為邊長作正三角形 ABE。在 $\overline{AB}$ 任取一點 F，過 E 點作 $\overline{EF}$ 的垂直線 GH 分別和 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 相交於 G 點、H 點 。



連接 F 點、G 點、H 點得三角形 FGH。四邊形 BFEH 裡∠FBH=90°且∠FEH=90°，因為四邊形 BFEH 的對角互補，所以四邊形 BFEH 是圓內接四邊形。因為圓周角∠FBE 和∠FHE 都對弧 FE，所以∠FBE=∠FHE。因為∠FBE=60°，所以∠FHE=60°。同理可知∠FGE=60°，因此可知三角形 FGH 是正三角形。

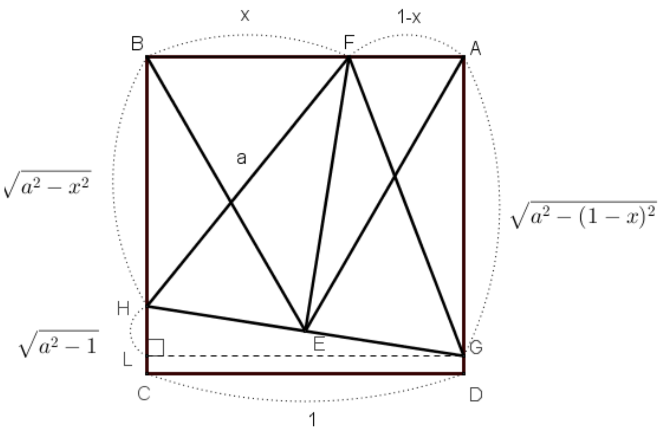




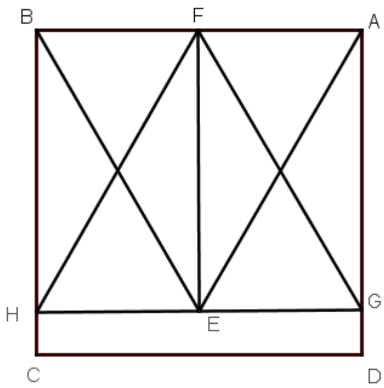
過 G 點作 $\overline{BC}$ 的垂直線並和 $\overline{BC}$ 相交於 L 點，如下圖。

如果正方形 ABCD 的邊長是 1，正三角形 FGH 的邊長是 a。假設 $\overline{BF}$ =x，則 $\overline{AF}$ =1-x，

$\overline{AG}=\sqrt{a^2-(1-x)^2}$ ，$\overline{BH}=\sqrt{a^2-x^2}$ ，$\overline{HL}=\sqrt{a^2-1}$ 。



如果 F 點是 $\overline{AB}$ 的中點，則 x=1-x，因此 x= $\frac{1}{2}$ 。

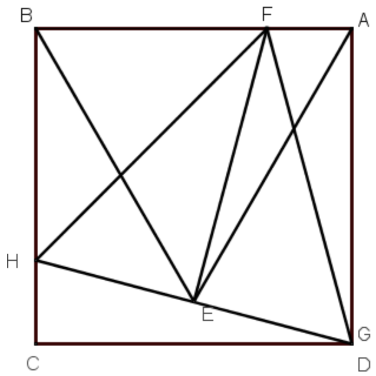


如果 G 點在正方形 ABCD 的頂點 D 上，則三角形 AGF 是直角三角形。因為∠FAD=∠HCD =90°，$\overline{DF}=\overline{DH}$，$\overline{DA}=\overline{DC}$，由斜股性質(RHS)可知△FAD≅△HCD，因此∠ADF=∠CDH。

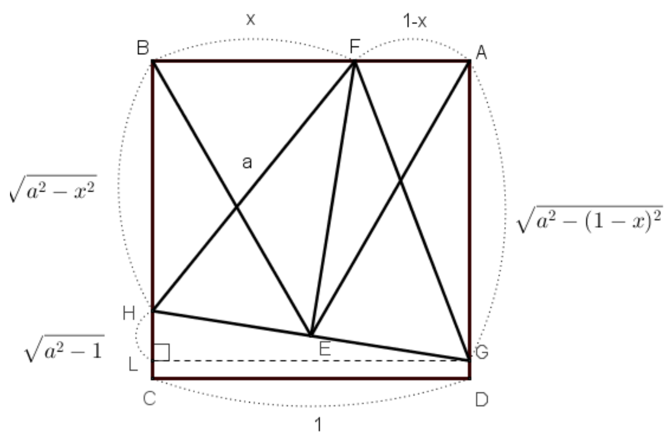
因為∠ADF=$(\frac{90-60}{2})^{\circ}$=15°，∠AFD=(90-15)°=75°，所以∠BFH=(180-60-75)°=45°，因此直角三角形 BFH 是等腰直角三角形。

如果 $\overline{BF}$=x，則 $\overline{FH}=\overline{FD}=\sqrt{2}x$。直角三角形 AFD 中，$\overline{AD}$=1，$\overline{AF}$=1-x，$\overline{FD}=\sqrt{2}x$，所以

$(\sqrt{2}x)^2=1+(1-x)^2$，解得 x=$\sqrt{3}-1$。



由上述討論可知，正方形 ABCD 的內接正三角形 FGH，如果三角形的頂點 F 由 $\overline{AB}$ 的中點往 A 點方向右移，則 G 點同時移向 D 點，可得 x 的範圍是 $\frac{1}{2}\le x\le\sqrt{3}-1$。



因為 $\overline{BH}+\overline{HL}=\overline{AG}$，所以 $\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2-1}=\sqrt{a^2-(1-x)^2}$，等號兩邊平方可得

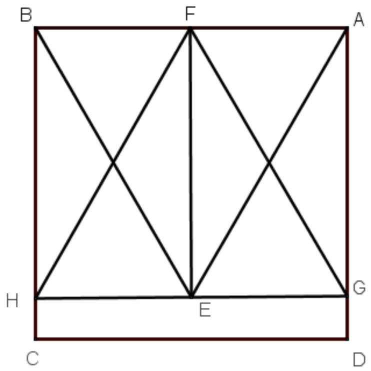
$(a^2-x^2)+2\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-1)}+(a^2-1)=a^2-(1-x)^2$ ，

$2\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-1)}=2x-a^2$ ，等號兩邊平方並化簡，得 $a^2=\frac{4}{3}(x^2-x+1)$ 。

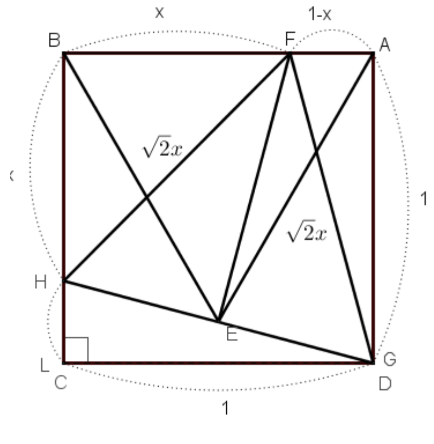
因為正三角形 FGH 的邊長是 a，面積是 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ，所以正三角形 FGH 的面積是 $\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2-x+1)$ 。

因為 $\frac{1}{2}\le x\le\sqrt{3}-1$ ，且 $\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2-x+1)=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{\sqrt{3}}{4}$ 。

當 $x=\frac{1}{2}$ 時，正三角形 FGH 的面積最小值是 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，此時 F 點是 $\overline{AB}$ 的中點。



當 $x=\sqrt{3}-1$ 時，正三角形 FGH 的面積最大值是 $2\sqrt{3}-3$ ， 此時 G 點在正方形 ABCD 的頂點 D 上。



總而言之，正方形 ABCD 的內接正三角形 FGH，如果內接正三角形有一個頂點在正方形的邊中點，則此時的內接正三角形的面積最小。如果內接正三角形有一個頂點在正方形的頂點，則此時的內接正三角形的面積最大。

2016.1.23