

循環節對稱圖

李信昌(昌爸)

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}, \quad \frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647}, \quad \frac{1}{19} = 0.\overline{052631578947368421}$$

$$\frac{1}{23} = 0.\overline{0434782608695652173913}, \quad \frac{1}{29} = 0.\overline{0344827586206896551724137931}$$

$$\frac{1}{47} = 0.\overline{0212765957446808510638297872340425531914893617}$$

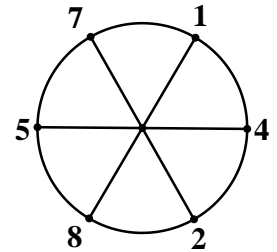
$$\frac{1}{59} = 0.\overline{0169491525423728813559322033898305084745762711864406779661}$$

上列幾個單位分數 $\frac{1}{p}$ 的分母都是質數，而且 $\frac{1}{p}$ 分別乘以 2、3、.....、(p-1)，都還是循環小數，其循環節是 $\frac{1}{p}$ 循环节的旋轉排列。

例如

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}, \quad \frac{1}{7} \times 2 = 0.\overline{285714}, \quad \frac{1}{7} \times 3 = 0.\overline{428571}, \quad \frac{1}{7} \times 4 = 0.\overline{571428},$$
$$\frac{1}{7} \times 5 = 0.\overline{714285}, \quad \frac{1}{7} \times 6 = 0.\overline{857142}, \quad \text{他們的循環節都是 142857 的}$$

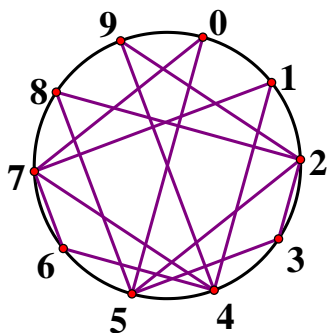
旋轉排列。



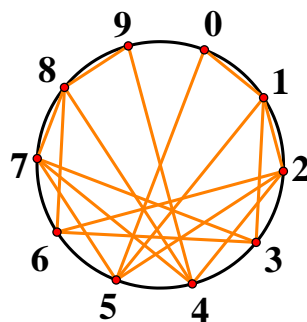
在小於 500 的質數 p，具備上列性質的 p 值有 7、17、19、23、29、47、59、61、97、109、113、131、149、167、179、181、193、223、229、233、263、269、313、337、367、379、383、389、419、433、461、487、491、499。

在西班牙有一位數學愛好者將圓盤 10 等分，等分點分別標註 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9，將 $\frac{1}{7}$ 、 $\frac{1}{11}$ 、 $\frac{1}{13}$ 、 $\frac{1}{17}$ 化為小數並依循環節循序連接對應的等分點，發現他們的圖形都是對稱的，參閱下列參考連結 1。

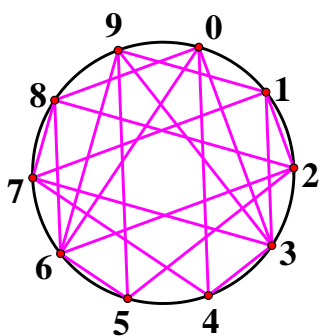
依照他的畫圖方法，我猜想當 $p=7、17、19、23、29、47、59、61、97、109、113、131、149、167、179、181、193、223、229、233、263、269、313、337、367、379、383、389、419、433、461、487、491、499$ ，則 $\frac{1}{p}$ 的循環節連接圖應該都是對稱的，如下列圖示。



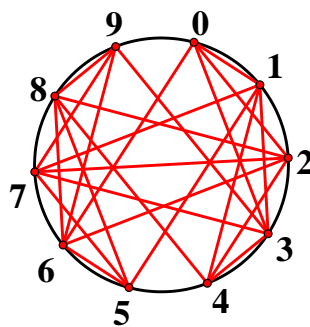
$$\frac{1}{17} = \overline{0.0588235294117647}$$



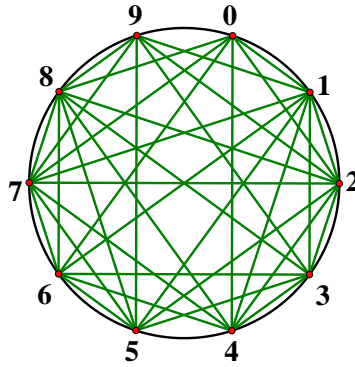
$$\frac{1}{19} = \overline{0.052631578947368421}$$



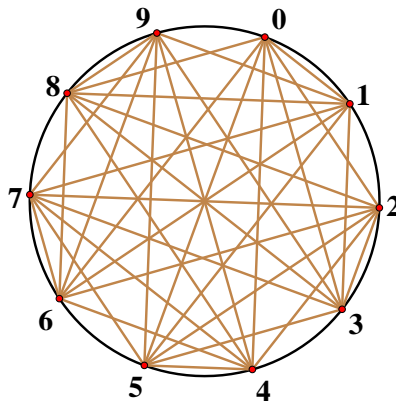
$$\frac{1}{23} = \overline{0.0434782608695652173913}$$



$$\frac{1}{29} = \overline{0.0344827586206896551724137931}$$



$$\frac{1}{47} = \overline{0.0212765957446808510638297872340425531914893617}$$



$$\frac{1}{59} = \overline{0.0169491525423728813559322033898305084745762711864406779661}$$

參考連結:

1. <https://matemelga.wordpress.com/2015/10/28/la-simetrica-geometria-de-los-primversos/#comments>
2. <http://www.geocities.ws/goodprimes/OFRP.html>
3. <http://www.mathland.idv.tw/fun/recurring.htm>
4. <http://www.mathland.idv.tw/fun/recurring2.htm>