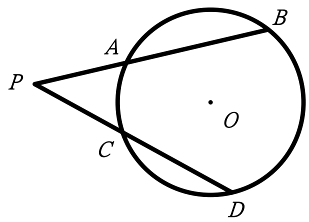
幾何逆定理的例子和應用

李信昌(昌爸)

2015/10/2

現行國中八年級上學期的數學課程包含多項式的乘法公式，到了八年級下學期，學生被期待可以逆向運用乘法公式來處理多項式的因式分解。但是國中數學課程裏的幾何定理大都著重在順向思考的綜合證明法，其實這些幾何定理大都具有可逆的結構，對於那些已經可以熟悉運用定理解題的學生，如果老師願意鼓勵他們跳脫傳統的單向思考，勇敢嘗試逆向思考，探索幾何定理逆命題的真假，這個過程不但可以激發學生發散性思考的潛能力，並提升學生的多面向的分析解題能力，也可以藉此培養學生的創造力。

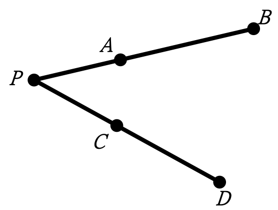
圓的外冪定理：「如圖，圓 O 上兩弦 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 不平行，且其延長線相交於圓 O 外一點 P，則 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$ 。」



利用相似三角形對應邊成比例就可以證明這個定理，
則它的逆命題是否為真呢？

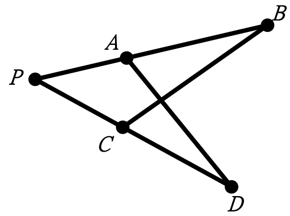
圓的外冪定理的逆命題敘述如下：

「已知兩條相異的線段 $\overline{PB}$ 和 $\overline{PD}$ ，且 A 點在 $\overline{PB}$ 上，C 在點 $\overline{PD}$ 上。如果 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$ ，則 A 點、B 點和 C 點、D 點在同一圓上。」

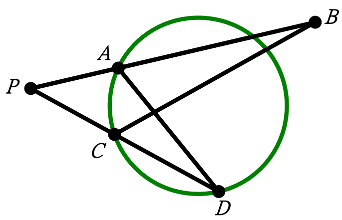


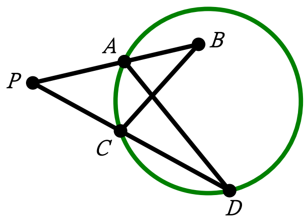
這個逆命題是真是假呢？就讓我們一起探索下去。

如下圖，連接$\overline{AD}$、$\overline{BC}$得三角形 PBC 和三角形 PDA，因為∠P=∠P，由
$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$推得知$\overline{PB} : \overline{PD} = \overline{PC} : \overline{DA}$， 所以△PBC~△PDA(SAS 相似)，因此
∠B=∠D。…(1)



已知通過不在同一直線的相異三個點可以決定一圓，因為 A、C、D 三個點不在同一直線，所以必有一圓通過 A、C、D 三個點。





假設 B 點在此圓(由 A、C、D 決定)的外面(如上左圖)，則∠B$<\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=$∠D， 這不符合(1)的論述。

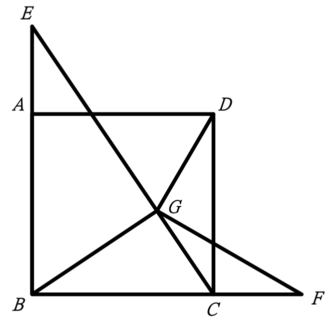
假設 B 點在此圓(由 A、C、D 決定)的內面(如上右圖)，則∠B$>\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=$∠D， 這不符合(1)的論述。

根據三一律可知 B 點在圓上，所以 A 點、B 點、C 點、D 點在同一圓上。因此，圓的外冪定理的逆命題為真，圓的外冪逆定理成立。

圓的外冪逆定理：「相異兩線段$\overline{PB}$和$\overline{PD}$，A 點在$\overline{PB}$上，C 在點$\overline{PD}$上。如果$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$，則 A、B、C、D 四點在同一圓上。」

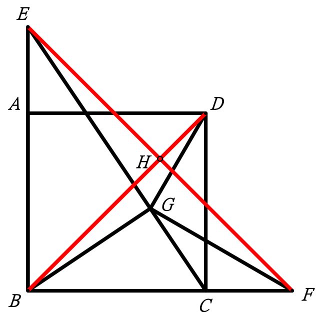
利用圓的外冪逆定理證明下列問題：

如右圖，正方形 ABCD，延長$\overline{BA}$和$\overline{BC}$，分別在$\overrightarrow{BA}$和$\overrightarrow{BC}$上取$\overline{AE}=\overline{CF}$。連接$\overline{CE}$，作$\overline{BG}\perp\overline{EC}$，G 點是垂足。試證：$\angle DGF=90^\circ$。



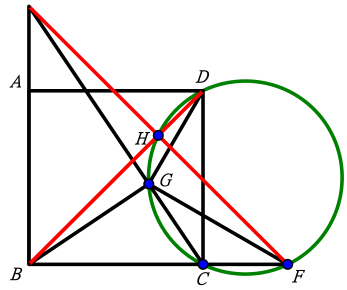
證明：

如右圖，連接$\overline{BD}$、$\overline{EF}$，$\overline{BD}$和$\overline{EF}$相交於 H 點。因為$\overline{BE}=\overline{BA}+\overline{AE}=\overline{BC}+\overline{CF}=\overline{BF}$，$\angle EBH=\angle FBH$，$\overline{BH}=\overline{BH}$，因此△EBH≅△FBH(SAS 全等性質)。因為 E、H、F 三點在同一直線，且$\angle EHB=\angle FHB$，所以$\angle EHB=\angle FHB=90^\circ$，即$\overline{BH}\perp\overline{EF}$。

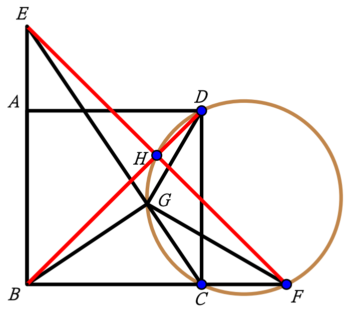


直角三角形 EBC 中，$\angle EBC=90^\circ$，且$\overline{BG}\perp\overline{EC}$，根據相似母子直角三角形性質的可知$\overline{BE}^2=\overline{EG}\times\overline{EC}$。同理，直角三角形 EBF 中$\overline{BE}^2=\overline{EH}\times\overline{EF}$，因此$\overline{EG}\times\overline{EC}=\overline{EH}\times\overline{EF}$。

如右圖，因為$\overline{EG}\times\overline{EC}=\overline{EH}\times\overline{EF}$，根據圓的外冪逆定理可知 G、C、F、H 四個點在同一圓上。



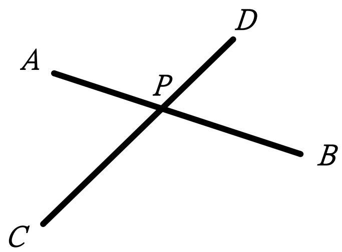
因為∠DHF＝90° 且∠DCF＝90° ，所以 D、H、C、F 四點在同一圓上，$\overline{DF}$是此圓的直徑，如下圖。



因為 G、C、F、H 四個點在同一圓上，同時 D、H、C、F 四個點也在同一圓上，而 C、F、H 三個點只可決定一個圓，所以 G 點和 D 點在 H、C、F 三個點所決定的一圓上。 因為∠DGF＝$\frac{1}{2}\overset{\frown}{DF}$，而且已知∠DCF＝90° ＝$\frac{1}{2}\overset{\frown}{DF}$， 所以∠DGF＝90° ，故得證。

以下的命題，可以鼓勵學生嘗試探索其真假，試試看。

1. 圓內冪定理的逆命題：「如下圖，兩條不平行的線段$\overline{AB}$和$\overline{CD}$ ，相交於 P 點。如果$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$ ，則 A、B、C、D 四個點在同一圓上。」



2. 命題：「凸四邊形 ABCD，∠A 的對角是∠C，如果∠A 和∠C 互補，則 A、B、C、D 四個點在同一圓上。」