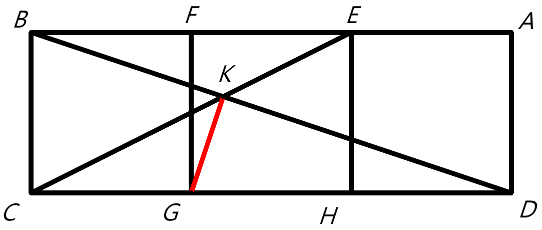
巧添輔助圖形證明三連方的幾何問題

李信昌(昌爸)

艱澀的幾何證明，往往因為「巧添」輔助線變得簡單。證明類似題的經歷是面對新問題時的依靠，強化證明難題的信心。

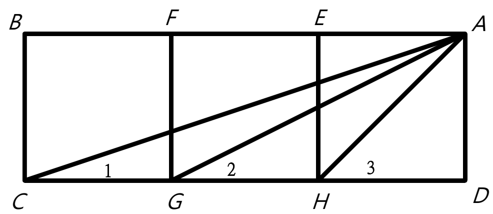
「附圖，三個全等的正方形連接成一個長方形 ABCD。連接$\overline{BD}$和$\overline{CE}$，相交於 K 點。試證明：(1) $\overline{GK}\perp\overline{BD}$ (2) $\overline{CK}$平分∠BKG。」



面對難解的新問題，通常可以回想是否曾經處理過類似的問題，並參考其作法。

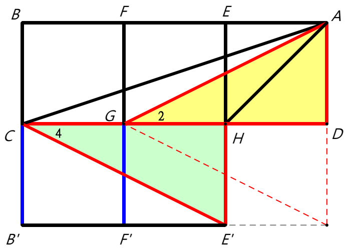
對於不擅長創造幾何輔助線的國中生而言，下列類題是一道難解的問題。

「三個全等正方形連接成一個矩形 ABCD。連 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AG}$ 、 $\overline{AH}$ ，試求∠1+∠2+∠3 的度數為何？」

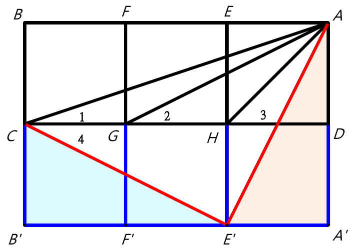


思考將原來題目裡的△AGD 圖形，以$\overline{GD}$為對稱軸作對稱圖，再向左平移一個$\overline{BF}$長，也就是將△AGD 全等轉換到△CE' H 的位置，即將∠2 全等移位到∠4。考慮造一個三角形含一個內角的大小等於∠1+∠2，因此再巧添輔助線，連接$\overline{AE'}$ 和$\overline{CE'}$ ，形成△ACE' 。本來要求∠1+∠2 的問題，就轉化成求△ACE' 裡∠ACE' 的度數，參

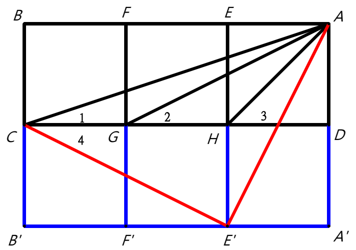
閱圖(一~三)。



圖一



圖二



圖三

因為$\triangle AA'E' \cong \triangle E'B'C$(SAS 全等)，所以$\angle AE'A' = \angle E'CB'$，且$\overline{AE'} = \overline{E'C}$ 。

因為$\angle AE'A' + \angle CE'B' = \angle E'CB' + \angle CE'B' = 90^\circ$ ，所以$\angle CE'A = 180^\circ - (\angle AE'A' + \angle CE'B') = 90^\circ$。

因為$\overline{E'C} = \overline{AE'}$ 且$\angle CE'A = 90^\circ$ ，所以$\triangle AE'C$是等腰直角三角形，因此$\angle 1 + \angle 4 = 45^\circ$ 。

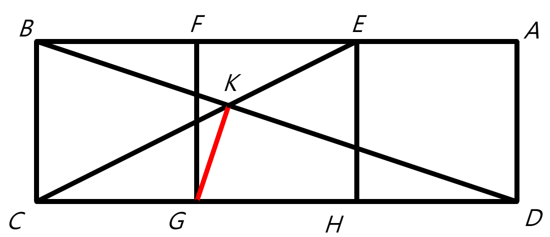
因為$\triangle AGD \cong \triangle CE'H$(SAS 全等)，所以$\angle 2 = \angle 4$，因此$\angle 1 + \angle 2 = 45^\circ$ 。

因為$\angle 3 = 45^\circ$ ，所以$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$。

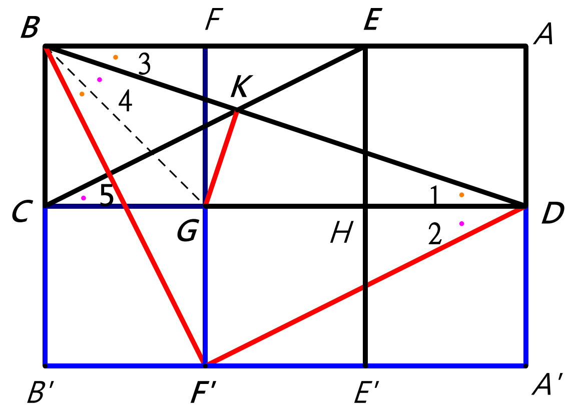
借助解類似題的舊經歷，嘗試解新問題

「附圖，三個全等正方形連接成一個矩形 ABCD。連接$\overline{BD}$和$\overline{CE}$，相交於 K 點。

試證明：(1) $\overline{GK} \perp \overline{BD}$ (2) $\overline{CK}$平分$\angle BKG$。」



作輔助圖如下：



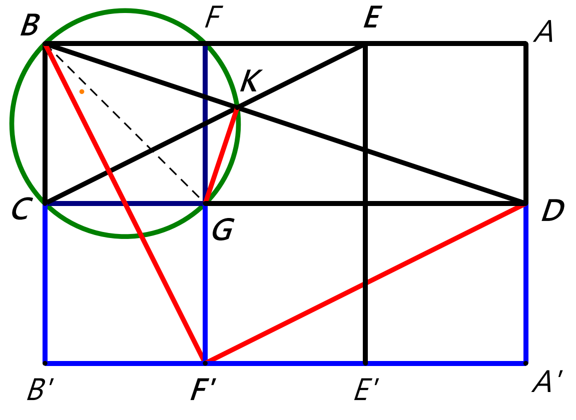
因為$\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4=45^{\circ}$，且$\angle 1=\angle 3$ (平行線，截線內錯角相等)，所以$\angle 2=\angle 4$。

因為$\triangle DGF' \cong \triangle CHE$(SAS 全等)，所以$\angle 2=\angle 5$。已證得知$\angle 2=\angle 4$，所以$\angle 4=\angle 5$。

因為$\triangle BGD$和$\triangle CKD$中，$\angle 1=\angle 1$，$\angle 4=\angle 5$，所以$\triangle BGD \sim \triangle CKD$(AA 相似)，

因此$\overline{DG}:\overline{DK}=\overline{DB}:\overline{DC}$，即$\overline{DG}\times\overline{DC}=\overline{DK}\times\overline{DB}$。

根據圓的外冪逆定理[註 1]可知 K、G、C、B 四點在同一圓上，因此$\angle BKG+\angle BCG=180^{\circ}$(圓內接四邊形對角互補)，已知$\angle BCG=90^{\circ}$，所以$\angle BKG=90^{\circ}$，即 $\overline{GK}\perp\overline{BD}$。



因為 K、G、C、B 四點共圓，而且$\overline{BC}=\overline{CG}$，所以$\angle BKC=\angle CKG$ (同圓的等弦對等圓心角)，即 $\overline{CK}$平分$\angle BKG$。 Q.E.D

[註 1]：

圓的外冪逆定理的證明可以參閱下列文章

http://www.mathland.idv.tw/teaching/幾何逆定理的例子和應用.pdf