再探正 n 邊形

李信昌

n 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$ 內一點 P，P 點到 n 邊形各邊 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}\ldots\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$ 的距離分別是 h_1、h_2、$\ldots h_{n-1}$、h_n，垂足分別是 B_1、$B_2\ldots B_{n-1}$、B_n。

運用畢氏定理可得，

$$\overline{A_1B_1}^2+h_1^2=\overline{B_nA_1}^2+h_n^2$$

$$\overline{A_2B_2}^2+h_2^2=\overline{B_1A_2}^2+h_1^2$$

$$\overline{A_3B_3}^2+h_3^2=\overline{B_2A_3}^2+h_2^2$$

....

....

....

$$\overline{A_nB_n}^2+h_n^2=\overline{B_{n-1}A_n}^2+h_{n-1}^2$$

將上列所有等式相加，可得 $\sum_{i=1}^{n}\overline{A_iB_i}^2=\overline{B_nA_1}^2+\sum_{i=1}^{n-1}\overline{B_iA_{i+1}}^2$，亦即

$\sum_{i=1}^{n-1}(\overline{A_iB_i}^2-\overline{B_iA_{i+1}}^2)+(\overline{A_nB_n}^2-\overline{B_nA_1}^2)=0$，

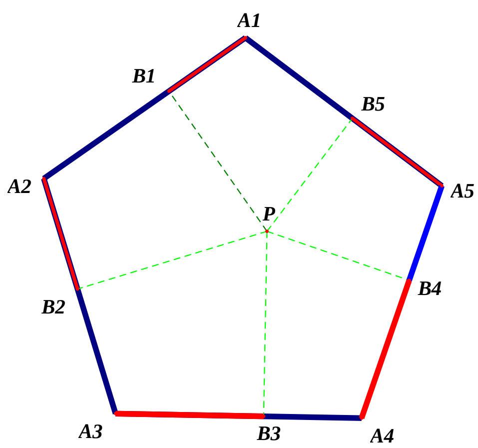
所以 $\sum_{i=1}^{n-1}(\overline{A_iA_{i+1}})(\overline{A_iB_i}-\overline{B_iA_{i+1}})+\overline{A_nA_1}(\overline{A_nB_n}-\overline{B_nA_1})=0$ 。

如果 n 邊形是正 n 邊形，則

$\sum_{i=1}^{n-1}(\overline{A_iB_i}-\overline{B_iA_{i+1}})+(\overline{A_nB_n}-\overline{B_nA_1})=0$，所以

$\sum_{i=1}^{n}\overline{A_iB_i}=\sum_{i=1}^{n-1}\overline{B_iA_{i+1}}+\overline{B_nA_1}=$

$\frac{1}{2}$(正 n 邊形周長)= $\frac{n\times\overline{A_1A_2}}{2}$ 。



如圖例，$\overline{A_1B_1}+\overline{A_2B_2}+\overline{A_3B_3}+\overline{A_4B_4}+\overline{A_5B_5}=\frac{1}{2}\times$(正 5 邊形的周長)= $\frac{5\times\overline{A_1A_2}}{2}$ 。

2010/12/21