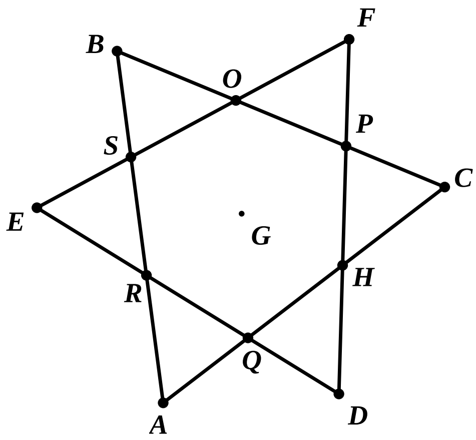
98年建中科學班第3題(選擇題)



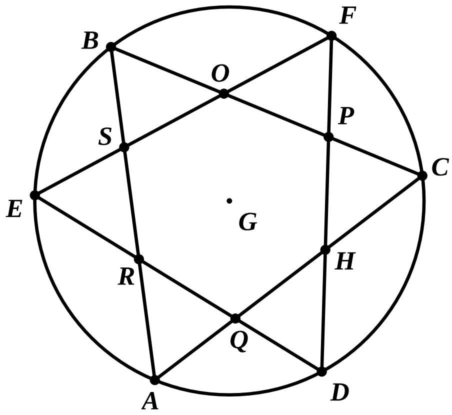
如圖兩個全等正三角形△ABC和正三角形△DEF，如果正三角形△ABC和△DEF的重心重合於G點，則△ARQ，△ERS，△BOS，△EOP，△HCP，△HDQ以上六個三角形都是全等的。

說明：

正三角形△ABC和△DEF的重心重合於G點，因此

G點到A點、B點、C點、D點、E點、F點的距離都相等。

若以G點為圓心，$\overline{GA}$為半徑畫圓G，則A點、B點、C點、D點、E點、F點都在圓G。



連$\overline{AE}$

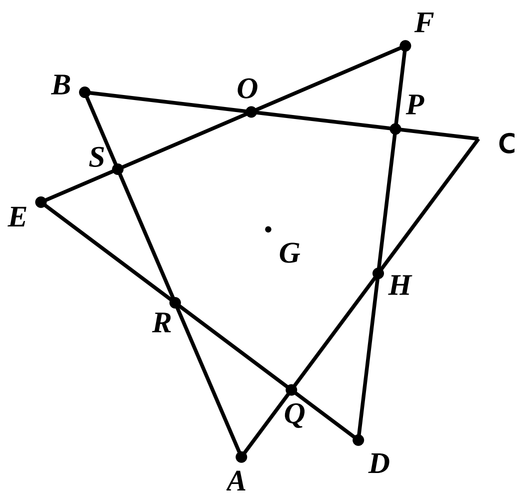
因為$\overline{AB}=\overline{DE}$，弧AEB=弧DAE，所以弧BE=弧DA，因此

∠BAE=∠DEA，即$\overline{RA}=\overline{RE}$。

在△ARQ和△ERS中，$\overline{RA}=\overline{RE}$，∠ARQ=∠ERS，

∠QAR=∠SER=60°，所以△ARQ≅△ERS(AAS)

同理可證，得知△ARQ，△ERS，△BOS，△EOP，△HCP，△HDQ以上六個三角形都是全等的。



如圖，正三角形△ABC和△DEF全等且各邊長是整數，正三角形△ABC和△DEF的重心重合於G點，且$\overline{BS}\perp\overline{EF}$。

若六邊形OPHQRS的面積是$\frac{1}{m}-\frac{\sqrt{3}}{n}$，其中m與n是有理數，則$\frac{m}{n}=$?

設 $\overline{BO}$=2x，則$\overline{BS}$=x，$\overline{SO}=\sqrt{3}$x，因此$\overline{BC}$=(3+$\sqrt{3}$)x。

全等的正三角形△ABC和正三角形△DEF的面積都等於

$\frac{\sqrt{3}}{4}(3+\sqrt{3})^2x^2$。

因為$\overline{BC}$是正整數，所以x是(3-$\sqrt{3}$)的正整數倍，又$\overline{BC}$=(3+$\sqrt{3}$)x，即$\overline{BC}$是6的正整數倍。

因為直角△BSO面積=$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$，可以令x=(3-$\sqrt{3}$)a，a是正整數，則△BSO面積=(6$\sqrt{3}$-9)a^2且

$\overline{BC}$=6a，正三角形△ABC面積=$\frac{\sqrt{3}}{4}(3+\sqrt{3})^2(3-\sqrt{3})^2a^2=9\sqrt{3}\ a^2$。

六邊形 OPHQRS 的面積=(正三角形△ABC 面積 × 2－直角△BSO 面積 × 6) ÷ 2

$= [\,9\sqrt{3}\ a^2 \times 2 - (6\sqrt{3}-9)a^2 \times 6\,] \div 2$

$= 27\,a^2 - 9\sqrt{3}\ a^2$

所以 $\frac{1}{m} = 27a^2$，$\frac{1}{n} = 9\,a^2$，因此$\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$ 。

台北縣新泰國中李信昌(昌爸)老師解題