國立臺中第一高級中學99學年度學術性向資賦優異學生鑑定數學科成就測驗試題

1 試求 $\dfrac{2010^2+2008^2+4}{2010\times 2008+2010\times 2-4016}$ 值。

2 如圖一，直角三角形 $\Delta ABC, \angle C=90^{\circ}$，面積為 10，又其內切圓切三邊 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$ 分別於 D,E,F，試求 $\overline{AD}\times\overline{BD}$ 。

3 一自然數 n，已知 n 與 168 之最小公倍數為 2520，試求滿足條件之 n 值有幾個。

4 設 a 為正實數，方程式 $|x-1|+2\cdot|x-2|+3\cdot|x-3|+a|x-4|+11\cdot|x-11|=k$ 有三個以上之實數解，試求 (a,k) 數對。

5 二次函數 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x^2-50x+95+|x^2-50x+95|)$，將 $x=1,2,\cdots,50$ 代入函數 $f(x)$ 中，求此 50 個函數值之和。

6 某商店有 A,B,C 三種商品，若購買 A 商品 3 件，B 商品 7 件，C 商品 4 件，需花費 170 元；若購買 A 商品 4 件，B 商品 11 件，C 商品 2 件，需花費 210 元。問欲購買 A 商品 1 件，B 商品 2 件，C 商品 2 件，需花費多少元。

7 已知方程式 $\dfrac{k}{x-1}-\dfrac{x}{x^2-x}=\dfrac{kx+1}{x}$ 恰只有一根 a，試求 (k,a) 數對。

8 四對夫婦任意坐成一列，試求：男女間隔且每對夫婦均不相鄰坐法之機率為。

9 已知 $-1\le x\le \dfrac{3}{2}$，則當 $x=k$ 時，$f(x)=(x+1)^3(3-2x)^2$ 有最大值 m，試求 (k,m) 數對。

10 從編號 1 到 100 號之 100 個圓球中逐次隨機取球，每次取一球，取出後不放回，取出之球號碼中，只要有三個號碼兩兩互質即停止取球(如 $(\underline{2},6,\underline{7},\underline{9})$，$(\underline{3},\underline{4},6,8,\underline{25})$ ...等)，停止時若已取出 k 球，試求 k 最大值。

11 正七邊形之七個頂點依逆時針方向編號為 1,2,3,4,5,6,7，一跳蚤開始位於 1 號頂點上依逆時針方向沿邊跳動，第一次跳一段，第二次跳二段，$\cdots$，第 k 次跳 k 段；當它跳 67 次後，試求哪幾號頂點跳蚤沒有停留過。

12 從 1 到 810 的自然數中找出若干數形成集合 A，A 集合中任意三個數其和皆為 18 的倍數。
若 A 集合元素最多為 n 個，此時 A 集合有 k 種可能組合，試求 (k,n) 序對。

13 若實係數多項式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，且已知 $f(1)=98, f(2)=197, f(3)=296$，求 $\dfrac{1}{2}(f(8)+f(-4))$。

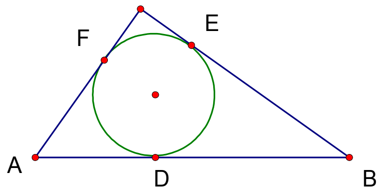
14 已知實數函數 $f(x)=\sqrt{4x^2-4x}+\sqrt{6+x-x^2}$，$f(x)$ 之最大值為 M，$f(x)$ 之最小值為 m，求 (M,m) 數對。

15 如圖二，$\overline{AB}=12, \overline{BD}=6$，以 $\overline{AB}$ 為邊作一正三角形 ΔABC，以 $\overline{BD}$ 為邊作一正三角形 ΔBDE；若 M 在 $\overline{AE}$ 上且 $\overline{AM}:\overline{ME}=1:2$，若 N 在 $\overline{CD}$ 上且 $\overline{CN}:\overline{ND}=1:2$，試求 ΔBMN 之面積。

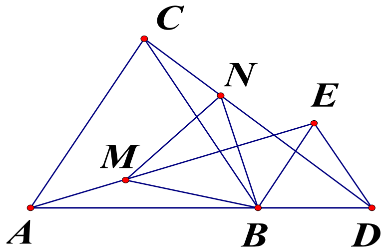
16 一堆球，如果是偶數個則拿走一半，如果是奇數個則添加一個後再拿走一半，此稱為「均分」。目前已知箱中有 n 個球(n 為奇數且大於 300)，經 9 次「均分」，添加過 7 次球後，箱中僅剩一球，試求 n 值。

17 已知數列 $\langle a_n\rangle$，$a_1=2$，$\langle a_n\rangle$ 前 n 項和 $S_n=3a_n-1, n=2,3,\ldots$；數列 $\langle b_n\rangle$ 滿足 $b_1=4$，$b_{k+1}=a_k+b_k, k=1,2,3,\cdots$。若 $\langle b_n\rangle$ 之前 m 項和大於 208，試求 m 最小值。

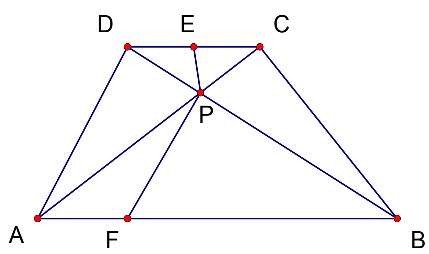
18 如圖三，梯形 $ABCD$，$\overline{AB}$ 平行 $\overline{CD}$，$\overline{AC}$ 交 $\overline{BD}$ 於 P，F 在 $\overline{AB}$ 上，$\overline{AF}=\dfrac{1}{4}\overline{AB}$，$E$ 在 $\overline{CD}$ 上，$\overline{DE}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}$；若梯形 $ABCD$ 面積為 36，且 $\overline{AF}=\overline{DE}$，求 ΔCPD 面積。



圖一



圖二



圖三

参考答案：

2，*10*，*8*，*(5,87)*，*187*，*60*， $(0,\frac{1}{2}),(1,-1)$ ， $\frac{1}{280}$ ， $(\frac{1}{2},\frac{27}{2})$ ，

68，*3,5,6*，*(3,45)*，*1457*， $(\sqrt{30},\sqrt{6})$ ， $13\sqrt{3}$ ，*385,321*，*9*，*4*