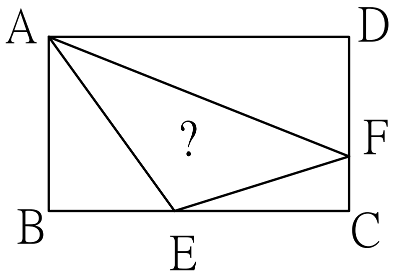
矩形內接三角形面積



自矩形 ABCD 的頂點 A 引兩線分別與 $\overline{BC}$ 與 $\overline{CD}$ 相交於 E、F 點。

已知△ABE、△ECF 與△ADF 的面積，是否可求計算出△AEF 的面積呢？
如果可以，四個三角形面積之間的關係式是如何？

假設 $\overline{AB}$=x，$\overline{AD}$=y，$\overline{BE}$=s，$\overline{EC}$=t，$\overline{CF}$=u，$\overline{FD}$=v。則

$$\triangle ABE+\triangle ECF+\triangle ADF=\frac{xs+tu+vy}{2}=\frac{s(u+v)+tu+v(s+t)}{2}$$

$$=\frac{u(s+t)+v(s+t)+sv}{2}=\frac{(u+v)(s+t)+sv}{2}$$

$$=\frac{\square ABCD}{2}+\frac{sv}{2}\cdots\cdots\quad(1)$$

因爲$\triangle ABE\times\triangle ADF=\frac{xs}{2}\times\frac{yv}{2}=\frac{xy}{2}\times\frac{sv}{2}$

所以$\frac{sv}{2}=\triangle ABE\times\triangle ADF\times\frac{2}{\triangle ABE+\triangle ECF+\triangle ADF+\triangle AEF}\cdots\cdots\quad(2)$

將(2)代入(1)

令△ABE＋△ECF＋△ADF=x 則 (1)式可寫成

$$x=\frac{x+\triangle AEF}{2}+\frac{2\triangle ABE\times\triangle ADF}{x+\triangle AEF}$$

$2x(x+\triangle AEF)=(x+\triangle AEF)^2+4\triangle ABE\times\triangle ADF$

$x^2=\triangle AEF^2+4\triangle ABE\times\triangle ADF$

因此$\triangle AEF=\sqrt{(\triangle ABE+\triangle ECF+\triangle FDA)^2-4\triangle ABE\times\triangle ADF}$。

昌爸工作坊

www.mathland.idv.tw