

如圖，銳角三角形 ABC ， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{AC} = b$ ， $\overline{AB} = c$ ，

$\angle BAC = \theta$ ， $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ ， H 點是垂足。

直角三角形 BHA ， $\angle BHA$ 是直角， $\overline{AH} = c \cdot \cos \theta$ ，

$\overline{BH} = c \cdot \sin \theta$ 。

直角三角形 BHC ， $\angle BHC$ 是直角， $\overline{HC} = b - c \cdot \cos \theta$ 。分別

以直角三角形 BHC 的三個邊向外作正方形甲、乙、丙，其邊

長分別是 $c \cdot \sin \theta$ 、 $b - c \cdot \cos \theta$ 、 a 。

由畢氏定理可知丙面積 = 甲面積 + 乙面積，因此 $a^2 = (c \cdot \sin \theta)^2 + (b - c \cdot \cos \theta)^2$ ，化簡式子得

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \theta$ 。…餘弦定理

如圖，鈍角三角形 ABC ， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{AC} = b$ ， $\overline{AB} = c$ ，

$\angle BAC = \theta > 90^\circ$ ， $\overline{BH} \perp \overline{CA}$ ， H 點是垂足。

直角三角形 BHA ， $\angle BHA$ 是直角， $\overline{AH} = c \cdot \cos(\pi - \theta)$ ，

$\overline{BH} = c \cdot \sin(\pi - \theta)$ 。

直角三角形 BHC ， $\angle BHC$ 是直角， $\overline{HC} = b + c \cdot \cos(\pi - \theta)$

$= b - c \cdot \cos \theta$ ， $\overline{BH} = c \cdot \sin(\pi - \theta) = c \cdot \sin \theta$ 。分別以直角

三角形 BHC 的三個邊向外作正方形甲、乙、丙，其邊長分

別是 $c \cdot \sin \theta$ 、 $b - c \cdot \cos \theta$ 、 a 。

由畢氏定理可知丙面積 = 甲面積 + 乙面積，因此 $a^2 = (c \cdot \sin \theta)^2 + (b - c \cdot \cos \theta)^2$ ，化簡式子得

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \theta$ 。…餘弦定理

